Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

67. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 21. MÄRZ 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35 Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28—30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

67. Band **Inhalt** 1. Heft

Seite

Thoma, E., Zur Reduktionstheorie in separablen Hilbert-Räumen 1
Henstock, R., The summation by convergence factors of Laplace-Stieltjes integrals outside their half plane of convergence 10
Walter, W., Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta^p u = f(u)$ 32
Walter, W., Verallgemeinerte Laplace-Operatoren und Potentiale 38
Bagemihl, F., On the set of values assumed by holomorphic functions near essential singularities 49
Agnew, R. P., Borel transforms of Tauberian series 51
Laugwitz, D., Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Vektorräumen und zur affingeometrischen Deutung der Theorie der Finsler-Räume 63
Naumann, H., Über Vektorsterne und Parallelprojektionen regulärer Polytope . . . 75
Jacobs, K., Fastperiodizitätseigenschaften allgemeiner Halbgruppen in Banach-Räumen 83

THOMA, E.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 1—9 (1957)

Zur Reduktionstheorie in separablen Hilbert-Räumen

Von
ELMAR THOMA

Der Begriff der verallgemeinerten direkten Summe wurde von J. VON NEUMANN in seiner Arbeit: On Rings of Operators. Reduction Theory, Ann. of Math. **50** (1949), eingeführt. Für den wichtigsten Satz (Theorem III) des 1. Teiles jener Arbeit wird hier ein Beweis gegeben, der direkter vorgeht als der Beweis bei VON NEUMANN. Wir sprechen den Satz übrigens etwas allgemeiner aus.

Im 1. Abschnitt führen wir den Begriff des direkten Integrals, der dem der verallgemeinerten direkten Summe entspricht, in einer für unsere Zwecke bequemen Weise ein. Im 2. Abschnitt betrachten wir Spektralmaße und im 3. Abschnitt führen wir den Beweis des oben erwähnten Satzes durch. Dabei benutzen wir neben grundlegenden Sätzen der Integrationstheorie und der Theorie der Hilbert-Räume nur den Satz von RADON-NIKODYM und den Satz, daß für n Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eines Hilbert-Raumes die positiv semidefinite Matrix $\|(x_i, x_j)\|$ eine vollständige Invariante bezüglich der Gruppe aller unitären Transformationen ist und daß es zu jeder positiv semidefiniten Matrix $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1, \ldots, n$, n Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ in jedem Hilbert-Raum einer Dimension $\geq n$ gibt, für die $(x_i, x_j) = a_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ ist. Im 4. Abschnitt beweisen wir noch den dazugehörigen Eindeutigkeitssatz mit denselben Hilfsmitteln.

Wir müssen uns wie J. VON NEUMANN auf *separable* Hilbert-Räume beschränken. Für den nicht separablen Fall ist unsere Methode ungeeignet. Zum Beweis eines entsprechenden Satzes im nicht-separablen Fall sind stärkere Hilfsmittel nötig. Vielleicht kommen wir an anderer Stelle auf diese Frage zurück.

1. Das direkte Integral

Unter einem *Hilbert-Raum* verstehen wir hier wie üblich einen linearen Raum über dem Körper der komplexen Zahlen, in dem ein Skalarprodukt erklärt ist und der bezüglich der dadurch eingeführten Norm vollständig ist. Da wir uns im weiteren Verlauf doch auf separable Hilbert-Räume beschränken müssen, wollen wir gleich von Anfang an nur diesen Fall betrachten. Wenn wir im folgenden von einen Hilbert-Raum sprechen, meinen wir daher stets einen *separablen* Hilbert-Raum, d.h. einen Raum endlicher oder abzählbar unendlicher Dimension. Um Ausnahmen zu vermeiden schließen wir noch den Raum der Dimension Null, d.h. den Raum, der alleine aus dem Nullvektor besteht, aus.

Es sei X eine nicht leere Menge und jedem $x \in X$ sei ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_x$ zugeordnet. Ferner sei $\mathfrak{R}$ ein σ-Körper von Teilmengen von X mit $\mathfrak{R} \ni X$

und μ ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{R}$. (Es gibt also Mengen $X_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ mit $\mu(X_\nu) < +\infty$ und $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} X_\nu = X$.) Der Bequemlichkeit halber nehmen wir noch an, daß $\mu | \mathfrak{R}$ vollständig ist, d.h. jede Teilmenge einer μ-Nullmenge zu $\mathfrak{R}$ gehört, und daß $\mu(X) \neq 0$ ist.

Eine „vektorwertige" Funktion f mit dem Definitionsbereich X nennen wir ein *Vektorfeld*[1]), wenn $f(x) \in \mathfrak{H}_x$ für alle $x \in X$. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Vektorfeldern nennen wir $\mathfrak{R}$-*ausgezeichnet*, wenn gilt: Ein Vektorfeld f gehört genau dann zu $\mathfrak{M}$, wenn $(f(x), g(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar für alle $g \in \mathfrak{M}$ ist[2]).

In einer $\mathfrak{R}$-ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ existiert $\int |f(x)|^2 \, d\mu$ stets[3]). Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{S}$ aller Vektorfelder aus $\mathfrak{M}$ mit $\int |f(x)|^2 \, d\mu < +\infty$. In $\mathfrak{S}$ kann man dann durch die Definition

$$(f, g) = \int (f(x), g(x)) \, d\mu$$

ein Skalarprodukt einführen. Man zeigt mit derselben Methode wie J. VON NEUMANN (l. c. S. 413, Beweis von Lemma 2), daß $\mathfrak{S}$ ein Hilbert-Raum ist. Dabei muß man natürlich in $\mathfrak{S}$ alle Vektorfelder gleichsetzen, die sich nur auf einer μ-Nullmenge voneinander unterscheiden. Wir nennen diesen Hilbert-Raum $\mathfrak{S}$ das *direkte Integral* der $\mathfrak{H}_x$ mit dem Maße $\mu | \mathfrak{R}$ und der ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ und schreiben dafür kurz $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x \, d\mu; \mathfrak{M})$.

Wenn man die $\mathfrak{H}_x$ auf einer μ-Nullmenge abändert, entsteht in naheliegender Weise eine neue ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}'$ und dazu ein direktes Integral $\mathfrak{S}'$. Ordnet man jedem Vektorfeld $f \in \mathfrak{S}$ ein Vektorfeld $f' \in \mathfrak{S}'$ zu, das sich nur auf einer μ-Nullmenge von f unterscheidet, dann erhält man offensichtlich eine unitäre Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$. Wir werden daher im folgenden direkte Integrale als gleich betrachten, die durch Änderung der $\mathfrak{H}_x$ auf einer μ-Nullmenge auseinander hervorgehen.

2. Das zugehörige Spektralmaß

Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{R}$ ein σ-Körper von Teilmengen einer nicht leeren Menge X mit $\mathfrak{R} \ni X$ und ist jedem $M \in \mathfrak{R}$ eine Projektion[4]) $E(M)$ in $\mathfrak{H}$ zugeordnet, so nennen wir diese Funktion ein *Spektralmaß* in $\mathfrak{H}$, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $E(X) = I$.

2. Aus $M_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ und $M_\nu \cap M_\mu = 0$ für $\nu \neq \mu$ folgt $E\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) f = \sum_{\nu=1}^{\infty} E(M_\nu) f$ für alle $f \in \mathfrak{H}$.

---

[1]) Zu dieser Bezeichnung vgl. R. GODEMENT, Sur la theorie des representations unitaires, Ann. of Math. **53**, S. 79 (1951).

[2]) Mit $(f(x), g(x))$ bezeichnen wir das Skalarprodukt in $\mathfrak{H}_x$.

[3]) $|f(x)| = +\sqrt{(f(x), f(x))}$.

[4]) Eine Projektion E ist eine beschränkte lineare Transformation in $\mathfrak{H}$ mit $E = E^2$ und $E^* = E$; z.B. sind die identische Transformation I $(f \to f)$ und die Nulltransformation 0 $(f \to 0)$ Projektionen.

Durch Hinzunahme aller E-Nullmengen kann man ein Spektralmaß genau so vervollständigen wie ein gewöhnliches Maß. Wir können daher im folgenden stets annehmen, daß ein Spektralmaß vollständig ist.

Es sei jetzt $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x \, d\mu; \mathfrak{M})$. Jedem $M \in \mathfrak{R}$ ordnen wir die Projektion $E(M)$ mit $E(M) f = \chi_M f$ zu; dabei ist χ_M die charakteristische Funktion von M, d.h. $\chi_M(x) = 0$ für $x \notin M$ und $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$. Man verifiziert sofort, daß diese Funktion $E/\mathfrak{R}$ ein Spektralmaß in $\mathfrak{S}$ ist. Wir nennen $E/\mathfrak{R}$, das zu $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x \, d\mu; \mathfrak{M})$ *gehörige Spektralmaß*. Es gilt dann: *$E/\mathfrak{R}$ und $\mu/\mathfrak{R}$ sind äquivalent*, d.h. sie haben dieselben Nullmengen. Insbesondere sind daher *$E/\mathfrak{R}$ und $\mu/\mathfrak{R}$ beide gleichzeitig vollständig*.

Beweis. a) Aus $M \in \mathfrak{R}$ und $\mu(M) = 0$ folgt $|E(M) f|^2 = |\chi_M f|^2 = \int\limits_M |f(x)|^2 \, d\mu = 0$ für alle $f \in \mathfrak{S}$, also ist $E(M) = 0$.

b) Es sei jetzt $M \in \mathfrak{R}$ und $E(M) = 0$. Wir nehmen an, daß $\mu(M) \neq 0$ wäre. Wegen der σ-Endlichkeit von μ gibt es ein $M' \in \mathfrak{R}$ mit $M' \subset M$ und $0 < \mu(M') < +\infty$. Wir wählen ein Vektorfeld g mit $|g(x)| = \chi_{M'}(x)$. Dann ist $g \in \mathfrak{M}$. Wir haben zu zeigen, daß $(f(x), g(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar für alle $f \in \mathfrak{M}$ ist. Da $|g(x)| = \chi_{M'}(x)$ ist, können wir uns auf $f \in \mathfrak{M}$ mit $f(x) = 0$ für $x \notin M'$ beschränken. Wir setzen nun

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \text{ mit } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{für } x \text{ mit } |f(x)| > n. \end{cases}$$

f_n gehört zu $\mathfrak{S}$, da $\mu(M') < +\infty$. Wegen $(f_n(x), g(x)) = (E(M) f_n(x), g(x)) = 0$ μ-fast überall, (da $E(M) = 0$), ist $(f_n(x), g(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar und wegen $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ ist $(f(x), g(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} (f_n(x), g(x))$ und daher $(f(x), g(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar. Da $0 < \int |g(x)|^2 \, d\mu = \mu(M') < +\infty$ ist, gilt $g \in \mathfrak{S}$ und $g \neq 0$. Es ist aber $E(M) g = \chi_M g = g \neq 0$ und daher $E(M) \neq 0$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $E(M) = 0$. Aus $E(M) = 0$ folgt daher $\mu(M) = 0$, w. z. b. w.

Wir sagen ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ wird durch das direkte Integral $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x \, d\mu; \mathfrak{M})$ *dargestellt*, wenn eine unitäre Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ gegeben ist. Das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ geht durch $UE'(M) U^{-1} = E(M)$ in ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}$ über. Wir nennen $E/\mathfrak{R}$ das *zur Darstellung* $(\int \mathfrak{H}_x \, d\mu; \mathfrak{M}; U)$ *gehörige Spektralmaß*. Es ist auch $E/\mathfrak{R}$ zu $\mu/\mathfrak{R}$ äquivalent, da $\mu/\mathfrak{R}$ und $E'/\mathfrak{R}$ und ebenso $E'/\mathfrak{R}$ und $E/\mathfrak{R}$ äquivalent sind.

3. Der Existenzsatz

Es sei ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und ein (vollständiges) Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}$ gegeben. Gibt es dann eine Darstellung $(\int \mathfrak{H}_x \, d\mu; \mathfrak{M}; U)$ von $\mathfrak{H}$ mit $E/\mathfrak{R}$ als zugehöriges Spektralmaß? Für separable Hilbert-Räume beantwortet diese Frage der folgende

Satz. *Ist $\mathfrak{H}$ ein separabler Hilbert-Raum und $E/\mathfrak{R}$ ein Spektralmaß in $\mathfrak{H}$, so gibt es*

1. ein endliches Maß $\mu/\mathfrak{R}$, das zu $E/\mathfrak{R}$ äquivalent ist und

2. zu jedem σ-endlichen Maß $\mu/\mathfrak{R}$, das zu $E/\mathfrak{R}$ äquivalent ist, eine Darstellung $(\int \mathfrak{H}_x \, d\mu; \mathfrak{M}; U)$ von $\mathfrak{H}$, zu der das gegebene Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ gehört.

Beweis. Zu 1. Es sei $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}$ [5]). Ferner seien α_i, $i=1, 2, \ldots$, reelle Zahlen mit $\alpha_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty$. Für $M \in \mathfrak{R}$ setzen wir

$$\mu(M) = \sum_{i=1}^{\infty} |E(M)\, \Phi_i|^2 \alpha_i,$$

dann ist $\mu/\mathfrak{R}$ ein Maß, das die 1. Behauptung erfüllt.

Zu 2. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

1. $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sei wieder eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}$. Wir betrachten die Funktionen $\mu_{ij}/\mathfrak{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, die durch $\mu_{ij}(M) = (E(M)\, \Phi_i, \Phi_j)$ definiert sind. Die μ_{ij} sind komplexwertige, beschränkte Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{R}$ und, da $E/\mathfrak{R}$ ein Spektralmaß ist, sind sie sogar totaladditiv. Aus $\mu(M) = 0$ folgt wegen der Äquivalenz von $\mu/\mathfrak{R}$ und $E/\mathfrak{R}$ auch $\mu_{ij}(M) = 0$. Nach dem Satz von RADON-NIKODYM gibt es daher $\mathfrak{R}$-meßbare Funktionen F_{ij} mit

(1) $$(E(M)\, \Phi_i, \Phi_j) = \int_M F_{ij}(x)\, d\mu \quad \text{für alle } M \in \mathfrak{R} \text{ und } i, j = 1, 2, \ldots.$$

2. Die Matrizen

(2) $$\begin{cases} M_n(x) = \|F_{ij}(x)\|_{i,j=1,\ldots,n} & \text{sind bis auf eine } \mu\text{-Nullmenge} \\ N < X \text{ alle } \textit{gleichzeitig} \text{ positiv semidefinit.} \end{cases}$$

Beweis. S_n sei die Menge aller $x \in X$, für die $M_n(x)$ nicht positiv semidefinit ist. Wir haben $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = 0$ zu zeigen. Dazu genügt es $\mu(S_n) = 0$ zu zeigen. Aus $x \in S_n$ folgt: Es gibt ein n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ komplexer Zahlen, so daß $\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \lambda_\nu \bar{\lambda}_\mu F_{\nu\mu}(x) \gneqq 0$ ist. Wegen der Stetigkeit in den λ_ν können wir sogar annehmen, daß die λ_ν rational sind, d.h. $\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ mit α_ν und β_ν rationale Zahlen. Ist $S_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ die Menge aller $x \in X$ mit $\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \lambda_\nu \bar{\lambda}_\mu F_{\nu\mu}(x) \gneqq 0$, dann ist also S_n gleich der Vereinigung aller $S_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ mit rationalen λ_ν. Da es nur abzählbar viele n-Tupel mit rationalen λ_ν gibt, ist $\mu(S_n) = 0$, wenn $\mu(S_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = 0$ für alle rationalen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist. Aus (1) folgt

$$0 \leq \left| E(M) \left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \Phi_\nu \right) \right|^2 = \left(E(M) \left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \Phi_\nu \right), \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \Phi_\nu \right)$$

$$= \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \lambda_\nu \bar{\lambda}_\mu (E(M)\, \Phi_\nu, \Phi_\mu) = \int_M \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \lambda_\nu \bar{\lambda}_\mu F_{\nu\mu}(x)\, d\mu$$

für alle $M \in \mathfrak{R}$. Daher kann $S_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ nur eine μ-Nullmenge sein. Setzen wir $F_{ij}(x) = 0$ für alle $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, dann bleibt (1) richtig und (2) gilt ohne Ausnahme. Wir können daher im folgenden annehmen, daß (2) ohne Ausnahme gilt.

[5]) Hat $\mathfrak{H}$ eine endliche Dimension, so ist $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ als endliche Serie zu betrachten. Im folgenden werden wir uns stets auf den abzählbar-unendlichen Fall beschränken. Die für den endlichen Fall notwendigen Änderungen sind offensichtlich.

3. Mit N bezeichnen wir vorübergehend die Menge aller $x \in X$ mit $F_{ij}(x) = 0$ für alle $i, j = 1, 2, \ldots$. N gehört zu $\mathfrak{R}$, da alle F_{ij} $\mathfrak{R}$-meßbar sind. Aus (1) folgt $|E(N)\Phi_i|^2 = \int_N F_{ii}(x)\, d\mu = 0$. Also ist $E(N) = 0$ und daher auch $\mu(N) = 0$. Auf N können wir also die F_{ij} nochmals so abändern, daß (1) und (2) ohne Ausnahme erfüllt bleiben und

(3) zu jedem $x \in X$ ein F_{ij} existiert mit $F_{ij}(x) \neq 0$.

Man braucht dazu z.B. für $x \in N$ nur $F_{11}(x) = 1$ und $F_{ij}(x) = 0$ für $i \neq 1, j \neq 1$ setzen. [Im übrigen soll (3) nur bewirken, daß die später zu konstruierenden Hilbert-Räume $\mathfrak{H}_x$ nicht nur aus dem Nullvektor bestehen. Nach der Bemerkung am Schluß des 1. Abschnittes kommt es auf die spezielle Wahl der $F_{ij}(x)$ auf einer μ-Nullmenge gar nicht an.] Wir nehmen im folgenden an, daß (1), (2) und (3) ohne Ausnahme erfüllt seien.

4. Wir ordnen nun jedem $x \in X$ einen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}'_x$ von abzählbarer Dimension zu und konstruieren mittels vollständiger Induktion eine Folge $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ von Vektoren aus $\mathfrak{H}'_x$ mit

(4) $$(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = F_{ij}(x) \quad \text{für } i, j = 1, 2, \ldots.$$

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ seien bereits gefunden, so daß (4) für $i, j = 1, \ldots, n$ erfüllt ist. Da $M_{n+1}(x)$ nach (2) positiv semidefinit ist, gibt es $n+1$ Vektoren $\varphi'_1(x), \ldots, \varphi'_{n+1}(x)$ mit $(\varphi'_i(x), \varphi'_j(x)) = F_{ij}(x)$. Also ist $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = (\varphi'_i(x), \varphi'_j(x))$ für $i = 1, \ldots, n$ und daher gibt es eine unitäre Transformation V in $\mathfrak{H}'_x$ mit $V\varphi'_i(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Wir setzen $\varphi_{n+1}(x) = V\varphi'_{n+1}(x)$, dann erfüllt $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ (4) für $i = 1, \ldots, n+1$.

5. Wir ordnen nun jedem $x \in X$ den von $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ in $\mathfrak{H}'_x$ aufgespannten Unterraum $\mathfrak{H}_x$ zu. Wegen (3) und (4) sind nicht alle $\varphi_i(x) = 0$, d.h. $\mathfrak{H}_x \neq 0$ für alle $x \in X$.

$\mathfrak{M}$ sei nun die Menge aller Vektorfelder f mit $f(x) \in \mathfrak{H}_x$ und $(f(x), \varphi_i(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar für $i = 1, 2, \ldots$. Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ *eine* $\mathfrak{R}$*-ausgezeichnete Menge ist.* Wegen (4) ist $\varphi_i \in \mathfrak{M}$. Also folgt aus $(f(x), g(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar für alle $g \in \mathfrak{M}$ insbesondere $(f(x), \varphi_i(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar für $i = 1, 2, \ldots$ und damit $f \in \mathfrak{M}$. Wir haben nun noch zu zeigen: Aus $f \in \mathfrak{M}$ und $g \in \mathfrak{M}$ folgt $(f(x), g(x))$ ist $\mathfrak{R}$-meßbar. Dazu zeigen wir zunächst: Ist $f \in \mathfrak{M}$ und $P_n(x)$ die Projektion auf den von $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ aufgespannten Teilraum, dann gibt es $\mathfrak{R}$-meßbare Funktionen α_i mit

(5) $$f_n(x) = P_n(x) f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, \varphi_i(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. $\{i_1, \ldots, i_r\}$ sei eine Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$, dann ist die Menge $S_{i_1, \ldots, i_r}$ aller $x \in X$, für die die $\varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_r}(x)$ linear unabhängig sind und denselben Teilraum wie $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ aufspannen, wegen (4) $\mathfrak{R}$-meßbar. Es genügt daher (5) für $\mathfrak{R}$-meßbare Teilmengen der Mengen $S_{i_1, \ldots, i_r}$ zu beweisen. Man setze $\alpha_i \equiv 0$ für $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ und berechne die übrigen α_i aus

dem Gleichungssystem

$$(f(x), \varphi_{i_\nu}(x)) = \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{i_\mu}(x)\,(\varphi_{i_\mu}(x), \varphi_{i_\nu}(x)), \quad \nu = 1, \ldots, r.$$

Wegen $x \in S_{i_1, \ldots, i_r}$ ist die Determinante dieses Systems $\neq 0$ und wegen $f \in \mathfrak{M}$ und (4) sind alle Koeffizienten $\mathfrak{K}$-meßbar. Also sind auch die Lösungen $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ $\mathfrak{K}$-meßbar. (5) ist damit bewiesen.

Es sei nun $f \in \mathfrak{M}$ und $g \in \mathfrak{M}$ und $g_n(x) = P_n(x)\, g(x)$, dann gilt $(f(x), g(x)) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x), g_n(x))$ wegen $\lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$ und $\lim_{n\to\infty} |g(x) - g_n(x)| = 0$. Wegen (5) und (4) ist $(f_n(x), g_n(x))$ $\mathfrak{K}$-meßbar und damit ist dann auch $(f(x), g(x))$ $\mathfrak{K}$-meßbar.

6. Da $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{K}$-ausgezeichnete Menge ist, können wir das direkte Integral $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu; \mathfrak{M})$ bilden. Wegen (1) und (4) ist $(\varphi_i, \varphi_j) = \int_X (\varphi_i(x), \varphi_j(x))\, d\mu = (\boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j) = \delta_{ij}$. Also ist $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein orthonormiertes System in $\mathfrak{S}$. Wir zeigen nun:

(6) $\qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ist eine Basis in $\mathfrak{S}$.

Beweis. $\tilde{\mathfrak{S}}$ sei der von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aufgespannte Unterraum von $\mathfrak{S}$. Wir haben $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$ zu zeigen.

a) $\chi_M \varphi_i \in \tilde{\mathfrak{S}}$ für alle $M \in \mathfrak{K}$, denn es gilt $|\chi_M \varphi_i|^2 = \int_M (\varphi_i(x), \varphi_i(x))\, d\mu =$ $|E(M)\, \boldsymbol{\Phi}_i|^2$ [nach (1) und (4)] $= \sum_{j=1}^{\infty} |(E(M)\, \boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j)|^2$ (da $\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2, \ldots$ Basis von $\mathfrak{H}$) $= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_M (\varphi_i(x), \varphi_j(x))\, d\mu \right|^2$ [nach (1) und (4)] $= \sum_{j=1}^{\infty} |(\chi_M \varphi_i, \varphi_j)|^2$. Also ist $\chi_M \varphi_i = \sum_{j=1}^{\infty} (\chi_M \varphi_i, \varphi_j)\, \varphi_j \in \tilde{\mathfrak{S}}$.

b) Aus $\alpha \varphi_i \in \mathfrak{S}$ und α $\mathfrak{K}$-meßbar folgt $\alpha \varphi_i \in \tilde{\mathfrak{S}}$. α ist nämlich Limes einer Folge $\{\alpha_n\}$ von $\mathfrak{K}$-meßbaren Treppenfunktionen (d.h. Funktionen, die nur endlich viele Werte annehmen) mit $|\alpha_n(x)| \leq |\alpha(x)|$. Nach a) ist $\alpha_n \varphi_i \in \tilde{\mathfrak{S}}$ und wegen $\lim_{n\to\infty} |\alpha \varphi_i - \alpha_n \varphi_i|^2 = \lim_{n\to\infty} \int |\alpha(x) - \alpha_n(x)|^2\, |\varphi_i(x)|^2\, d\mu = 0$ ist auch $\alpha \varphi_i \in \tilde{\mathfrak{S}}$.

c) Es sei nun $f \in \mathfrak{S}$, dann ist wegen (5) auch $f_n \in \mathfrak{M}$ und wegen $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ sogar $f_n \in \mathfrak{S}$. Aus (5) und b) folgt $f_n \in \tilde{\mathfrak{S}}$ und wegen

$$\lim |f - f_n|^2 = \lim_{n\to\infty} \int |f(x) - f_n(x)|^2\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)|^2\, d\mu = 0$$

ist dann auch $f \in \tilde{\mathfrak{S}}$. Also ist $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$, w. z. b. w.

7. Wegen (6) gibt es genau eine unitäre Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ mit

(7) $\qquad U \varphi_i = \boldsymbol{\Phi}_i \quad$ für $i = 1, 2, \ldots$.

Sei nun $E'/\mathfrak{R}$ das zu $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu; \mathfrak{M})$ gehörige Spektralmaß, so gilt

$$UE'(M)\,U^{-1}\Phi_i = UE'(M)\,\varphi_i = U\chi_M\varphi_i = U\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(\chi_M\varphi_i,\varphi_j)\,\varphi_j\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}(\chi_M\varphi_i,\varphi_j)\,U\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty}(\chi_M\varphi_i,\varphi_j)\,\Phi_j = \sum_{j=1}^{\infty}\int_M(\varphi_i(x),\varphi_j(x))\,d\mu\cdot\Phi_j$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}(E(M)\,\Phi_i,\Phi_j)\,\Phi_j = E(M)\,\Phi_i.$$

Also ist $UE'(M)\,U^{-1}\Phi_i = E(M)\,\Phi_i$ für $i = 1, 2, \ldots$ und da beide Transformationen in $\mathfrak{H}$ beschränkt und linear sind und $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ eine Basis in $\mathfrak{H}$ bilden, gilt also $UE'(M)\,U^{-1} = E(M)$ für alle $M \in \mathfrak{R}$. Damit ist gezeigt, daß die Darstellung $(\int \mathfrak{H}_x d\mu; \mathfrak{M}; U)$ von $\mathfrak{H}$ die 2. Behauptung unseres Satzes erfüllt.

4. Der Eindeutigkeitssatz

Es seien $(\int \mathfrak{H}_x^i d\mu_i; \mathfrak{M}_i; U_i)$, $i = 1, 2$, zwei Darstellungen von $\mathfrak{H}$, zu denen das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ gehört. In welcher Beziehung stehen diese beiden Darstellungen? Darüber gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz. *Ist $\mathfrak{H}$ ein separabler Hilbert-Raum und $E/\mathfrak{R}$ ein Spektralmaß in $\mathfrak{H}$ und sind $(\int \mathfrak{H}_x^i d\mu_i; \mathfrak{M}_i; U_i)$, $i = 1, 2$, zwei Darstellungen von $\mathfrak{H}$, zu denen das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ gehört, so gilt:*

1. *$\mu_i/\mathfrak{R}$ ist äquivalent zu $E/\mathfrak{R}$ für $i = 1, 2$. $\mu_1/\mathfrak{R}$ und $\mu_2/\mathfrak{R}$ sind äquivalent und es gibt eine $\mathfrak{R}$-meßbare Funktion γ mit dem Definitionsbereich X mit*

a) *$\gamma(x) > 0$ für alle $x \in X$ und*

b) *$\mu_2(M) = \int_M \gamma(x)\,d\mu_1$ für alle $M \in \mathfrak{R}$.*

2. *Bis auf die Punkte einer E-Nullmenge N gibt es zu jedem $x \in X$ eine unitäre Abbildung $V(x)$ von $\mathfrak{H}_x^1$ auf $\mathfrak{H}_x^2$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Ist $f_1 \in \mathfrak{S}_1 = (\int \mathfrak{H}_x^1 d\mu_1; \mathfrak{M}_1)$ und*

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}\cdot V(x)\,f_1(x) & \text{für } x \notin N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases}, \quad \text{so ist } f_2 \in \mathfrak{S}_2 = (\int \mathfrak{H}_x^2 d\mu_2; \mathfrak{M}_2).$$

b) *Die in* a) *durch $f_1 \to f_2$ definierte Abbildung V ist eine unitäre Abbildung von $\mathfrak{S}_1$ auf $\mathfrak{S}_2$, die die zugehörigen Spektralmaße ineinander überführt.*

Wir bemerken noch: *Aus* 2. *folgt insbesondere, daß $\mathfrak{H}_x^1$ und $\mathfrak{H}_x^2$ bis auf eine E-Nullmenge überall die gleiche Dimension haben.*

Beweis. Zu 1. Am Schluß des 2. Abschnittes haben wir bereits gezeigt, daß $\mu_i/\mathfrak{R}$ und $E/\mathfrak{R}$ äquivalent sind[6]). Die übrigen Behauptungen von 1. sind einfache Folgerungen (Satz von RADON-NIKODYM) aus dieser Tatsache.

Zu 2. 1. $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sei eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}$. Ferner sei $\varphi_j^i = U_i^{-1}\Phi_j$, $j = 1, 2, \ldots$. $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots$ ist eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{S}_i$.

[6]) Im ganzen Beweis ist $i = 1, 2$.

Es sei $\widetilde{\mathfrak{H}}_x^i$ der von $\varphi_1^i(x), \varphi_2^i(x), \ldots$ aufgespannte Teilraum von $\mathfrak{H}_x^i$. Wir zeigen nun, daß bis auf eine E-Nullmenge

$$\widetilde{\mathfrak{H}}_x^i = \mathfrak{H}_x^i$$

ist. Es sei vorübergehend N_i die Menge aller $x \in X$ mit $\widetilde{\mathfrak{H}}_x^i \neq \mathfrak{H}_x^i$. Es genügt zu zeigen, daß N_i eine μ_i-Nullmenge ist. X_j, $j = 1, 2, \ldots$ sei eine Überdeckung von X mit $X_j \in \mathfrak{R}$ und $\mu_i(X_j) < +\infty$. Dann ist N_i sicher eine μ_i-Nullmenge, wenn alle $N_j^i = N_i \cap X_j$ μ_i-Nullmengen sind; das soll nun bewiesen werden.

f_0 sei ein Vektorfeld mit $f_0(x) = 0$ für $x \notin N_j^i$ und $f_0(x) \perp \widetilde{\mathfrak{H}}_x^i$ und $|f_0(x)| = 1$ für $x \in N_j^i$. In 2. wird gezeigt, daß $f_0 \in \mathfrak{M}_i$ ist. Wegen $\int |f_0(x)|^2 \, d\mu_i \leq \mu_i(X_j) < +\infty$ ist dann $f_0 \in \mathfrak{S}_i$. Da $(f_0, \varphi_j^i) = \int (f_0(x), \varphi_j^i(x)) \, d\mu_i = 0$ für $j = 1, 2, \ldots$ ist, ist $f_0 = 0$ und damit $\int |f_0(x)|^2 \, d\mu_i = \mu_i(N_j^i) = 0$.

2. Wir haben noch $f_0 \in \mathfrak{M}_i$ zu beweisen. Zunächst ist $(f_0(x), \varphi_j^i(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar $f_0 = 0$ für $j = 1, 2, \ldots$, da $(f_0(x), \varphi_j^i(x)) = 0$ ist. Es sei nun $g \in \mathfrak{S}_i$, dann ist

$$\lim_{n \to \infty} \left| g - \sum_{j=1}^{n} (g, \varphi_j^i) \varphi_j \right|^2 = \lim_{n \to \infty} \int \left| g(x) - \sum_{j=1}^{n} (g, \varphi_j^i) \varphi_j^i(x) \right|^2 d\mu_i = 0.$$

Man zeigt dann mit den üblichen Methoden, daß es eine Folge $n_1, n_2, \ldots$ gibt mit $g(x) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{j=1}^{n_\nu} (g, \varphi_j^i) \varphi_j^i(x)$ μ_i-fast überall. Wegen $(f_0(x), g(x)) = \lim_{\nu \to \infty} \left(f_0(x), \sum_{j=1}^{n_\nu} (g, \varphi_j^i) \varphi_j^i(x) \right)$ μ_i-fast überall ist $(f_0(x), g(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar für alle $g \in \mathfrak{S}_i$.

Es sei jetzt $g \in \mathfrak{M}_i$. Wegen $f_0(x) = 0$ für $x \notin X_j$ können wir uns auf g mit $g(x) = 0$ für $x \notin X_j$ beschränken. Wir setzen

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \text{ mit } |g(x)| \leq n \\ 0 & \text{für } x \text{ mit } |g(x)| > n. \end{cases}$$

Wegen $\mu_i(X_j) < +\infty$ gehört dann $g_n \in \mathfrak{S}_i$ und wegen $(f_0(x), g(x)) = \lim_{n \to \infty} (f_0(x), g_n(x))$ ist $(f_0(x), g(x))$ $\mathfrak{R}$-meßbar. Also ist $f_0 \in \mathfrak{M}_i$.

3. $E_i'/\mathfrak{R}$ sei das zu $\mathfrak{S}_i = (\int \mathfrak{H}_x^i \, d\mu_i, \mathfrak{M}_i)$ gehörige Spektralmaß. Da $(\int \mathfrak{H}_x^i \, d\mu_i; \mathfrak{M}_i; U_i)$ eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ mit dem dazugehörigen Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ ist, gilt

$$\int_M (\varphi_j^i(x), \varphi_k^i(x)) \, d\mu_i = (E'(M) \varphi_j^i, \varphi_k^i) = (E(M) U_i \varphi_j^i, U_i \varphi_k^i) = (E(M) \Phi_j, \Phi_k).$$

Also ist

$$(8) \quad \begin{cases} \int_M (\varphi_j^1(x), \varphi_k^1(x)) \, d\mu_1 = \int_M (\varphi_j^2(x), \varphi_k^2(x)) \, d\mu_2 \\ = \int_M \gamma(x) (\varphi_j^2(x), \varphi_k^2(x)) \, d\mu_1 \text{ für alle } M \in \mathfrak{R} \text{ und } j, k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Aus (8) folgt noch

$$(9) \quad \begin{cases} (\varphi_j^1(x), \varphi_k^1(x)) = \gamma(x) (\varphi_j^2(x), \varphi_k^2(x)) \\ E\text{-fast überall gleichzeitig für } j, k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

$\widetilde{X}$ sei nun die Menge aller $x \in X$ mit

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \widetilde{\mathfrak{H}}_x^1 = \mathfrak{H}_x^1, \widetilde{\mathfrak{H}}_x^2 = \mathfrak{H}_x^2 & \text{und} \quad (\varphi_j^1(x), \varphi_k^1(x)) \\ \quad = \gamma(x)\,(\varphi_j^2(x), \varphi_k^2(x)) & \text{für } j,k = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

Nach 1. und 3. ist $N = X - \widetilde{X}$ eine E-Nullmenge ($=\mu_1$-Nullmenge $=\mu_2$-Nullmenge). Zu jedem $x \in \widetilde{X}$ gibt es wegen (10) genau eine unitäre Abbildung $V(x)$ von $\mathfrak{H}_x^1$ auf $\mathfrak{H}_x^2$ mit

$$\text{(11)} \qquad V(x)\,\varphi_j^1(x) = \sqrt{\gamma(x)}\,\varphi_j^2(x), \quad j = 1,2,\ldots.$$

Jedem Vektorfeld $f_1 \in \mathfrak{S}_1$ ordnen wir nun das (bis auf die μ_2-Nullmenge N bestimmte) Vektorfeld f_2 mit

$$\text{(12)} \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} \cdot V(x) f_1(x) \quad \text{für } x \in \widetilde{X}$$

zu. Wir schreiben dafür $Vf_1 = f_2$ und zeigen, daß V eine unitäre Abbildung des Hilbert-Raumes $\mathfrak{S}_1$ auf den Hilbert-Raum $\mathfrak{S}_2$ ist.

4. Wir werden weiter unten zeigen:

$$\text{(13)} \qquad \text{Aus } f_1 \in \mathfrak{S}_1 \text{ folgt } Vf_1 \in \mathfrak{S}_2.$$

Es sei $f_1 \in \mathfrak{S}_1$ und $g_1 \in \mathfrak{S}_1$, dann gilt

$$\begin{aligned}(Vf_1, Vg_1) &= \int \frac{1}{\gamma(x)} \left(V(x) f_1(x),\ V(x) g_1(x)\right) d\mu_2 \\ &= \int \left(f_1(x), g_1(x)\right) \frac{1}{\gamma(x)}\, d\mu_2 = \int \left(f_1(x), g_1(x)\right) d\mu_1 = (f_1, g_1).\end{aligned}$$

Also ist V eine unitäre Abbildung von $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{S}_2$. Aus (11) folgt aber

$$\text{(14)} \qquad V\varphi_j^1 = \varphi_j^2, \quad j = 1,2,\ldots$$

und da $\{\varphi_j^2\}$ eine Basis von $\mathfrak{S}_2$ ist, ist V eine Abbildung von $\mathfrak{S}_1$ *auf* $\mathfrak{S}_2$.

5. Wir haben noch (13) zu zeigen. Aus (14) [gilt unabhängig von (13)] folgt $V\varphi_j^1 \in \mathfrak{S}_2$ für $j = 1,2,\ldots.$ Entsprechendes gilt auch für alle endlichen Linearkombinationen der φ_j^1. $\mathfrak{S}_1'$ sei die Menge dieser Linearkombinationen. Für $f_1 \in \mathfrak{S}_1'$ und $g_1 \in \mathfrak{S}_1'$ folgt wie oben $(Vf_1, Vg_1) = (f_1, g_1)$. Ist $f_1 \in \mathfrak{S}_1$, so gibt es eine Folge $\{f_\nu^1\}$ mit $f_\nu^1 \in \mathfrak{S}_1'$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} |f_1 - f_\nu^1| = 0$. Dann gibt es auch eine Teilfolge $\{f_{\nu_k}^1\}$ mit $f_1(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{\nu_k}^1(x)$ μ_1-fast überall ($=E$-fast überall). Wegen (12) gilt $(Vf_1)(x) = \lim\limits_{k\to\infty} (Vf_{\nu_k}^1)(x)$ E-fast überall ($=\mu_2$-fast überall). Da aber V zumindest in $\mathfrak{S}_1'$ eine unitäre Abbildung ist, ist $Vf_{\nu_k}^1$ in $\mathfrak{S}_2$ eine Cauchy-Folge. Es gibt also ein $f \in \mathfrak{S}_2$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} |f - Vf_{\nu_k}^1| = 0$ und daher eine Teilfolge $\{f_{\nu_l}^1\}$ von $\{f_{\nu_k}^1\}$ mit $f(x) = \lim\limits_{l\to\infty} (Vf_{\nu_l}^1)(x)$ μ_2-fast überall. Also ist $f(x) = (Vf_1)(x)$ μ_2-fast überall und daher $f = Vf_1 \in \mathfrak{S}_2$.

6. Es ist $VE_1'(M)V^{-1}\varphi_j^2 = VE_1'(M)\varphi_j^1 = V\chi_M\varphi_j^1 = \chi_M\varphi_j^2 = E_2'(M)\varphi_j^2$ für $j = 1,2,\ldots.$ Also gilt $VE_1'(M)V^{-1} = E_2'(M)$ für alle $M \in \mathfrak{R}$. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 23. Oktober 1956)

R. Henstock
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 10—31 (1957)

The summation by convergence factors of Laplace-Stieltjes integrals outside their half plane of convergence

By
R. Henstock

When $\sum_{n=0}^{\infty} f_n v^n$ is a power series, then the limit as m tends to infinity of the expression $\sum_{n=0}^{\infty} g_{mn} f_n v^n$ some times enables us to sum the power series in regions outside the circle of convergence[1]). Putting $v = e^{-z}$ we see that the power series can be expressed as a Laplace-Stieltjes integral

$$\int_0^{\infty} e^{-zw}\, ds(w), \tag{1}$$

where in this special case the only variation of $s(w)$ consists of jumps at the integer values of w and the integral is convergent in a vertical half plane.

For general functions $s(w)$, if (1) is convergent at one point z it is again convergent in a vertical half plane, and the present paper studies the summation of (1) by convergence factors $a(x, w)$ in regions outside the half plane of convergence.

Paper [4] and the formal theory of this paper, except Lemma 1 and Theorem 2, were stimulated by lectures on the corresponding matrix theory given by Dr. R. G. Cooke.

1. Notation

We suppose that $f(w)$ is defined and finite in $w \geqq 0$, and we denote by $[f]_\alpha^\beta$ the difference $f(\beta) - f(\alpha)$, and by $V[f; W]$ the *weak variation*[2]) of $f(w)$ over a set W in $w \geqq 0$. If the limits exist,

$$f(w-) = \lim_{u \to w,\ 0 \leq u < w} f(u), \qquad f(w+) = \lim_{u \to w,\ 0 \leq w < u} f(u).$$

To simplify enunciations we assume that $f(w) = f(0+)$ for $w < 0$, whenever $f(0+)$ exists. Then $f(0-) = f(0+)$.

If $f(w)$ is of bounded variation in $w \geqq 0$ we define

$$f_c(0) = f(0+), \qquad f_c(w) = f(w-) - \sum_{0 < u < w} \{f(u+) - f(u-)\} \qquad (w > 0),$$

the *continuous part of* $f(w)$.

[1]) See, for example, Okada [6], Cooke [1], Chapter 8.
[2]) See, for example, Saks [7], p. 221, § 4.

If W is a set in $w \geqq 0$ we denote its LEBESGUE measure by $\mu(W)$ and its characteristic function by $ch(W; w)$. The intervals $\alpha \leqq w \leqq \beta$ and $\alpha < w < \beta$ are respectively denoted by $[\alpha, \beta]$, (α, β).

The symbols (R), (L), (LS), (PS), (IP), placed before an integral sign denote respectively that the integral is the RIEMANN integral (or a contour integral of RIEMANN type), the LEBESGUE integral, the LEBESGUE-STIELTJES integral, WARD's PERRON-STIELTJES integral, and the "integral by parts" of [4], defined to be

$$(2) \qquad (IP)\int_{\alpha}^{\beta} f(w)\,ds(w) \equiv f(\beta)\,s(\beta) - f(\alpha)\,s(\alpha) - (PS)\int_{\alpha}^{\beta} s(w)\,df(w),$$

whenever the integral on the right exists. This integral (2) is the only integral strong enough for our purpose, as is explained in [4]. When $f(w)$ is of bounded variation and $s(w)$ is a bounded BAIRE[3]) function in $\alpha \leqq w \leqq \beta$, then[4]) (2) exists and

$$(3) \qquad \begin{cases} (IP)\int_{\alpha}^{\beta} f(w)\,ds(w) = f(\beta-)\,s(\beta) - f(\alpha+)\,s(\alpha) - \\ \qquad - \sum_{\alpha<w<\beta} s(w)\{f(w+) - f(w-)\} - (LS)\int_{\alpha}^{\beta} s(w)\,df_c(w). \end{cases}$$

As in [4], the generalized limit $S(s)$ of a bounded BAIRE function $s(w)$ as w tends to infinity, is taken to be of the form

$$(4) \qquad S(s) \equiv \lim_{x\to\infty} S(s, x) \equiv \lim_{x\to\infty} \lim_{w\to\infty} S(s, x, w),$$

where

$$(5) \qquad S(s, x, w) \equiv (IP)\int_{0}^{w} a(x, u)\,ds(u),$$

and where

$$(6) \qquad \liminf_{u\to w} a(x, u) \leqq a(x, w) \leqq \limsup_{u\to w} a(x, u)$$

when w and u are in $w \geqq 0$. In particular, if $a(x, 0+)$ exists we assume that

$$a(x, 0-) = a(x, 0) = a(x, 0+).$$

The use of (6) simplifies the integration theory; if it is omitted we need only replace $a(x, w)$ by $a(x, w+)$ in the subsequent theorems, and add conditions corresponding to [5], Theorem 3 (9), (10), (11), where $j(u)$ is as in [5], Theorem 4 (36), with $g(u)$ replaced by $a(x, u)$, and with $a = 0$ and b arbitrarily large.

The LAPLACE-STIELTJES integrals are taken to be of the form

$$(7) \qquad F(s(\cdot); z) \equiv F(z) \equiv \lim_{w\to\infty} F(z, w),$$

---

[3]) A BAIRE (BOREL-*measurable*) function is any function that can be obtained from continuous functions by using repeated limits.

[4]) See [4], p. 276, (1.6).

where

$$F(z,w) \equiv (IP)\int_0^w e^{-zu}\,ds(u) = e^{-zw}s(w) - s(0) + (L)\int_0^w z\,e^{-zu}s(u)\,du, \tag{8}$$

and where $s(w)$ is a BAIRE function bounded in each finite interval of $w \geqq 0$. The manipulation of (8) needs the following Lemma.

Lemma 1. *If $b(w)$ and $c(w)$ are finite in $w \geqq \alpha$, and if $a(w)$ is bounded in each finite interval of $w \geqq \alpha$, and if*

$$I(w) \equiv (IP)\int_\alpha^w b(u)\,dc(u), \qquad (IP)\int_\alpha^w a(u)\,dI(u)$$

exist for all $w \geqq \alpha$, then

$$(IP)\int_\alpha^w a(u)\,dI(u) = (IP)\int_\alpha^w a(u)\,b(u)\,dc(u).$$

From Lemma 1, taking

$$a(u) = e^{(v-z)u}, \qquad b(u) = e^{-vu}, \qquad c(u) = s(u),$$

we obtain, for all complex z, v,

$$F(z,w) = (IP)\int_0^w e^{(v-z)u}\,d_uF(v,u) \tag{9}$$

$$= e^{(v-z)w}F(v,w) + (L)\int_0^w (z-v)\,e^{(v-z)u}F(v,u)\,du. \tag{10}$$

Let $R(r)$ denote the half plane $re\,z > r$. Then if $F(z)$ is convergent at some point $z = v$, it is also by (10) convergent in $R(re\,v)$, and equal there to

$$F(z) = (L)\int_0^\infty (z-v)\,e^{(v-z)w}F(v,w)\,dw. \tag{11}$$

Thus the integral for $F(z)$, given by (7), (8), is convergent in $R(\sigma)$ for some minimal $\sigma < +\infty$, and divergent at all points of $re\,z < \sigma$. Note that σ can be $-\infty$.

When $s(w)$ has jumps at the integers, and is constant in the intervals between the integers, $R(\sigma)$ corresponds, by the exponential transformation $v = e^{-z}$, to the circle $|v| < e^{-\sigma}$ of convergence of a power series in v. The domain of z that corresponds to the principal star domain of the series, is defined as follows.

If Z is a set of complex numbers we denote its complement by CZ, and for a fixed complex number v we denote by $Z+v$ the set of $z+v$ for all z in Z.

We define an *H-set* to be a set Z of complex numbers with the following properties.

(12) Z is closed.

If v lies in Z then so do all points z with

$$\text{im}\, z = \text{im}\, v, \qquad \text{re}\, z \leqq \text{re}\, v. \tag{13}$$

(14) The zero 0 lies in Z.

(15) No point of $R(0)$ lies in Z.

(16) The section of Z by each line $\text{re}\, z = \text{constant}$ is bounded.

Under (13) and (14), Z contains Z_0, the line $\text{im}\, z = 0$, $\text{re}\, z \leqq 0$. For each function $F(z)$ of type (7), (8) we can define a real function $\alpha = \alpha(\beta)$ of the real number β to be such that $F(z)$ can be continued analytically along the whole line $\text{re}\, z \geqq \gamma$, $\text{im}\, z = \beta$, for all $\gamma > \alpha$ but for no $\gamma < \alpha$. Then $-\infty \leqq \alpha \leqq \sigma$ for all β.

If Z is an H-set we now put

$$H(F; Z) \equiv C \bigcup_{\beta} \{Z + (\alpha + i\beta)\}.$$

Then the *principal horizontal domain of* $F(z)$ is $H_0 = H(F; Z_0)$. In words, it consists of lines λ parallel to the real axis, including such part of λ that lies to the right of all singularities on λ, or including the whole of λ if there is no singularity on λ. We suppose that the value of $F(z)$ in H_0 is that given by direct analytic continuation from the half plane of convergence of the integral for $F(z)$.

The *partial horizontal domain*[5]) of $F(z)$, relative to Z, is $H(F; Z)$, and

$$H(F; Z) \subseteqq H_0.$$

For the summation of the LAPLACE-STIELTJES integrals given by (7), (8), we replace $s(u)$ in (5) by $F(z, u)$, and thus we consider

$$B(F; z, x) \equiv (IP) \int_0^\infty a(x, w)\, d_w F(z, w), \tag{17}$$

where $a(x, w)$ is a finite BAIRE function satisfying (6). By Lemma 1, if $a(x, w)$ is bounded in each finite interval of $w \geqq 0$ we obtain

$$B(F; z, x) = (IP) \int_0^\infty a(x, w)\, e^{-zw}\, ds(w). \tag{18}$$

Let Z be an H-set. Taking a fixed real number p, we say that the function $a(x, w)$ is *efficient* $(Z; p)$ for an $F(z)$ satisfying (7), (8), if

(19) $B(F; z, x)$ exists for each $x \geqq 0$ and each z in $R(\sigma - p)$,

and as $x \to \infty$, $B(F; z, x)$ is uniformly convergent to $F(z)$ in each compact set contained in

$$H(F; Z) \cap R(\sigma - p), \tag{20}$$

whenever $F(z)$ is convergent in $R(\sigma)$.

[5]) Compare the definition of partial star domain given in COOKE [1], p. 189.

In the following pages we study the problem of finding necessary and sufficient conditions on $a(x, w)$ in order that it should be *efficient* $(Z; p)$ for all $F(z)$ satisfying (7), (8), or for a special subclass of $F(z)$. Not all functions *efficient* $(Z; p)$ for all $F(z)$ of type (7), (8) satisfy the conditions of [4], p. 276, Theorem 3. A proof of this statement could be constructed following that given in [3]. The reason for this result is that H_0 is an open set. The integral for $F(z)$ may be convergent at a point on the boundary of H, whereas we do not assume that $B(F; z, x)$ tends to $F(z)$ there.

2. A direct definition of the integral by parts, and the proof of Lemma 1.

Given the finite functions $f(w)$, $s(w)$, defined in $[\alpha, \beta]$, we say that $D(w)$ is a *major function of* $f(w)$ *with respect to* $s(w)$ *in* $[\alpha, \beta]$, *in the sense of the integral by parts*, if $D(\alpha) = 0$, and for u, w in $[\alpha, \beta]$, there is a $\delta(w) > 0$ such that

$$[D]_w^u \geq f(u)\,[s]_w^u \quad \text{if} \quad 0 < u - w \leq \delta(w),$$

$$[D]_w^u \leq f(u)\,[s]_w^u \quad \text{if} \quad 0 > u - w \geq -\delta(w).$$

The upper integral by parts of $f(w)$ *with respect to* $s(w)$, is

$$(IP)\int_{\alpha}^{-\beta} f(w)\,ds(w) \equiv \inf D(\beta)$$

for all such major functions $D(w)$, if there are any. If not, we write $+\infty$ for the value of the upper integral. Now

$$[fs - D]_w^u - s(w)\,[f]_w^u = f(u)\,[s]_w^u - [D]_w^u,$$

so that $D(w)$ is a major function of $f(w)$ with respect to $s(w)$ in $[\alpha, \beta]$, in the sense of the integral by parts, if and only if $[fs]_\alpha^w - D(w)$ is a minor function of $s(w)$ with respect to $f(w)$ in $[\alpha, \beta]$, in the sense of the WARD's PERRON-STIELTJES integral[6]). Hence

$$(21) \qquad (IP)\int_{\alpha}^{-\beta} f(w)\,ds(w) = [fs]_\alpha^\beta - (PS)\int_{-\alpha}^{\beta} s(w)\,df(w).$$

Similarly we can define minor functions in the sense of the integral by parts, and then the lower integral by parts, obtaining

$$(22) \qquad (IP)\int_{-\alpha}^{\beta} f(w)\,ds(w) = [fs]_\alpha^\beta - (PS)\int_{\alpha}^{-\beta} s(w)\,df(w).$$

If the upper and lower integrals by parts are finite and equal, we define the common value as the *integral by parts*, obtaining from (21) and (22),

$$(23) \qquad (IP)\int_{\alpha}^{\beta} f(w)\,ds(w) = [fs]_\alpha^\beta - (PS)\int_{\alpha}^{\beta} s(w)\,df(w),$$

so that the new definition agrees with [4], (1.2), and with the present (2).

To prove Lemma 1 we now follow the proof of [9], p. 588, Theorem 6, taking major and minor functions in the sense of the integral by parts.

[6]) See WARD [9], p. 584, inequalities (5), (6).

3. *The existence of* $B(F; z, x)$

In this section we consider requirement (19) in the definition of *efficiency* $(Z; p)$.

THEOREM 1. *If* $a(x, w)$ *is a finite* BAIRE *function satisfying* (6), *then in order that the* $B(F; z, x)$ *of* (17) *should exist for a fixed* $x \geqq 0$, *for* z *in* $R(\sigma - p)$, *and for each* $F(z)$ *satisfying* (7), (8), *convergent in* $R(\sigma)$, *and with* $s(w)$ *a* BAIRE *function bounded in each finite interval of* $w \geqq 0$, *it is necessary and sufficient that*

$$M_1(q, x) \equiv V[e^{qw} a(x, w); (0, \infty)] < \infty \tag{24}$$

for each $q < p$.

For the necessity we take $s(w)$ to be bounded in $w \geqq 0$. Then the integral for $F(z)$ is convergent at least in $R(0)$, so that by hypothesis, $B(F; z, x)$ is convergent at least in $R(-p)$. From (8),

$$F(0, w) = s(w) - s(0),$$

so that we take $z = 0$ and use the proof of [4], p. 275, Theorem 2, first part, to show that $a(x, w)$ is of bounded variation in each finite interval of $w \geqq 0$, for the particular $x \geqq 0$. Applying Lemma 1 we obtain (18). Hence taking $z = -q$ for $q < p$ we obtain (24) by the proof of [4], p. 276, Theorem 3 (ii), first part.

To prove the sufficiency let z be fixed in $R(\sigma - p)$. Then there is a $q < p$ such that $\operatorname{re} z + q < \sigma$, and thus

$$\lim_{w \to \infty} F(z + q, w) = F(z + q).$$

Taking $w > u \geqq 0$, and using (24) and Lemma 1, we obtain

$$|e^{qw} a(x, w) - a(x, 0)| \leq M_1(q, x) < \infty,$$

$$\begin{aligned}
(IP) \int_u^w a(x, y)\, d_y F(z, y) &= (IP) \int_u^w e^{qy} a(x, y)\, d_y \left\{ (IP) \int_u^y e^{-q\eta}\, d_\eta F(z, \eta) \right\} \\
&= (IP) \int_u^w e^{qy} a(x, y)\, d_y \{F(z + q, y) - F(z + q, u)\} \\
&= (IP) \int_u^w e^{qy} a(x, y)\, d_y \{F(z + q, y) - F(z + q)\} \\
&= \left[e^{qy} a(x, y) \{F(z + q, y) - F(z + q)\} \right]_u^w - \\
&\quad - (PS) \int_u^w \{F(z + q, y) - F(z + q)\}\, d_y \{e^{qy} a(x, y)\},
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
&\left| (IP) \int_u^w a(x, y)\, d_y F(z, y) \right| \leq \\
&\leq \{2 M_1(q, x) + |a(x, 0)|\} \sup_{u \leq y \leq w} |F(z + q, y) - F(z + q)|,
\end{aligned} \right. \tag{25}$$

and the right-hand side of (25) tends to 0 as $u, w \to \infty$. Hence $B(F; z, x)$ exists as a convergent integral in $R(\sigma - p)$. Further, from (25),

$$|B(F; z, x)| \leqq \{2M_1(q, x) + |a(x, 0)|\} \sup_{w \geqq 0} |F(z + q, w) - F(z + q)|. \tag{26}$$

This result will be needed later.

4. A special subclass of the functions $F(z)$

For real $r \geqq 0$, we say that $F(z)$ *belongs to the class* S_r if $F(z)$ satisfies (7), (8), with $s(w)$ a BAIRE function satisfying

$$s(w) = O(1), \qquad (L)\int_w^{w+1} |s(u)|\, du = O(e^{-rw}), \tag{27}$$

as $w \to \infty$.

Theorem 2. *If $a(x, w)$ is a finite* BAIRE *function satisfying* (6), *and if $p > 0$, then in order that for every $0 \leqq r < p$, $a(x, w)$ should be efficient $(Z; r)$ for each $F(z)$ of S_r, it is necessary and sufficient that* (24) *is true for all $x \geqq 0$, $q < p$; that*

$$a(x, w\pm) \text{ tend to } 1 \text{ as } x \to \infty \text{ for each fixed } w \geqq 0; \tag{28}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{w > 0} e^{qw} |a(x, w+) - a(x, w-)| = 0, \tag{29}$$

for each $q < p$;

for each $k \geqq 0$, and for each BOREL *set W satisfying*

$$\mu\{W \cap (w, w+1)\} = O(e^{-kw}) \tag{30}$$

as $w \to \infty$, we have, for each $q < \inf(p, k)$, the two conditions

$$\lim_{x \to \infty} (LS)\int_W e^{qw}\, d_w a_c(x, w) = 0, \tag{31}$$

$$(LS)\int_W e^{qw}\, d_w V[a_c(x, u); (0, w)] \leqq M_2(q, k)\left[1 + \sup_{w \geqq 0} e^{kw} \mu\{W \cap (w, w+1)\}\right], \tag{32}$$

where $M_2(q, k)$ is finite and independent of W and of $x \geqq x_0(q, k)$.

It will be shown later that

$$\limsup_{x \to \infty} M_1(q, x) < \infty \quad \text{for each} \quad q < 0, \tag{33}$$

follows from (28), (29), and (32) for $k = 0$.

Note that for each $w > 0$,

$$\liminf_{x \to \infty} M_1(q, x) \geqq \liminf_{x \to \infty} |e^{qw} a(x, w-) - a(x, 0+)| = |e^{qw} - 1|.$$

Hence for $0 < q < p$, $M_1(q, x) \to \infty$ as $x \to \infty$, and (33) cannot be true for any $q > 0$.

The necessity of (24) follows from the proof of the necessity in Theorem 1. The necessity of (28) follows as does the necessity of Theorem 3 (i) of [4], p. 276. To prove the necessity of (29), (31), (32) we assume that $s(w)$ satisfies

(27) with $s(0)=0$. Then for $z\neq 0$, integrating by parts in a LEBESGUE integral,

$$\begin{aligned} F_1(z,w) &= (IP)\int_0^w e^{-zu}\,d_u\left\{(L)\int_0^u s(y)\,dy\right\} \\ &= e^{-zw}(L)\int_0^w s(y)\,dy + z(L)\int_0^w \left\{(L)\int_0^u s(y)\,dy\right\} e^{-zu}\,du \\ &= (L)\int_0^w e^{-zu}s(u)\,du \\ &= -z^{-1}e^{-zw}s(w) + z^{-1}F(z,w), \end{aligned}$$

$$F(z,w) = e^{-zw}s(w) + zF_1(z,w). \tag{34}$$

The formula (34) is true also for $z=0$. From (34), for z in $R(0)$, as $s(w)$ is bounded,

$$F(z) = zF_1(z), \quad \text{where} \quad F_1(z) \equiv \lim_{w\to\infty} F_1(z,w). \tag{35}$$

By analytic continuation (35) is true for all z in the principal horizontal domain of $F_1(z)$. In particular, it is true in $R(-r)$, since by (27), the integral defining $F_1(z)$ is absolutely convergent there. Hence from (34), (35), and by hypothesis, $e^{-zw}s(w)$ is summed to 0 in $R(-\inf(p,r))$. Taking $z=-q>-\inf(p,r)$, we see that

$$e^{qw}s(w) \textit{ is summed to } 0 \textit{ for all } q<\inf(p,r). \tag{36}$$

If (29) is false for some $q<p$, then for some sequence $x_n\to\infty$ and some $\varepsilon>0$,

$$\sum_{w>0} e^{qw}\,|a(x_n,w+)-a(x_n,w-)| \geqq \varepsilon > 0. \tag{37}$$

Let $\{w_m\}$ be the countable set of discontinuities in $w>0$ of the $a(x_n,w)$ for all n. Then if $s_1(w)$ is bounded, and 0 unless w lies in $\{w_m\}$, $s_1(w)$ will satisfy (27) for all r, and by (36), for $r=p$ and $q<p$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_{n\,m}\,t_m \to 0$$

as $n\to\infty$, where

$$v_{n\,m} \equiv \exp(q\,w_m)\,\{a(x_n,w_m+)-a(x_n,w_m-)\}, \qquad t_m \equiv s_1(w_m).$$

Hence by [4], p. 281, Lemma 2,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |v_{n\,m}| \to 0$$

as $n\to\infty$, contradicting (37). Thus (29) is true.

From (24), (27), (29), (36), with $q<\inf(p,r)$ and $s(0)=0$,

$$(IP)\int_0^{\infty} a(x,w)\,d_w\{e^{qw}s(w)\}\to 0,$$

$$\left[e^{qw}s(w)\,a(x,w)\right]_0^{\infty}=0,$$

$$\sum_{w>0} e^{qw}s(w)\{a(x,w+)-a(x,w-)\} = O\Big(\sum_{w>0} e^{qw}|a(x,w+)-a(x,w-)|\Big)\to 0$$

as $x \to \infty$, and therefore

$$(38)\quad \begin{cases} (LS)\int_0^\infty e^{q\,w}\, s(w)\, d_w a_c(x,w) \\ \qquad = \left[e^{q\,w}\, s(w)\, a(x,w)\right]_0^\infty - \sum_{w>0} e^{q\,w} s(w)\,\{a(x,w+) - a(x,w-)\} - \\ \qquad\quad - (IP)\int_0^\infty a(x,w)\, d_w\{e^{q\,w}\, s(w)\} \to 0 \end{cases}$$

as $x \to \infty$, for each $q < \inf(p, r)$. To obtain (31) we have only to take $s(w)$ as the characteristic function of W, with $r = k$.

Let us define the norm $\|s\|$ of a function $s(w)$ satisfying (27) for some fixed r, to be

$$\|s\| = \sup_{w \geq 0} |s(w)| + \sup_{w \geq 0} \left\{ e^{r\,w}\ (L)\int_w^{w+1} |s(u)|\, du \right\}.$$

The class S_r then becomes a BANACH space[7]), as it is easily shown to be complete.

For each $q < p$, the transformation

$$(39)\qquad (LS)\int_0^\infty e^{q\,w}\, s(w)\, d_w a_c(x,w)$$

applied to functions $s(w)$ of S_r, is obviously additive and homogeneous[8]). To prove that it is also continuous we need a lemma.

Lemma 2. *If, for each* $q < p$,

$$M_3(q) \equiv V\left[e^{q\,w}\, a(w); [0, \infty)\right] < \infty,$$

then, for each $q < p$,

$$|a(w)| \leq e^{-q\,w} M_3(q).$$

For fixed $q < p$ there is an $\varepsilon > 0$ such that $q + \varepsilon < p$, and then

$$|e^{(q+\varepsilon)\,w}\, a(w) - e^{(q+\varepsilon)\,u}\, a(u)| \leq V\left[e^{(q+\varepsilon)\,y}\, a(y); [u, w]\right] \to 0$$

for $u < w$, as $u \to \infty$. Hence

$$\lim_{w \to \infty} e^{(q+\varepsilon)\,w}\, a(w)$$

exists, and so

$$\lim_{w \to \infty} e^{q\,w}\, a(w) = 0,$$

$$|e^{q\,u}\, a(u)| \leq V\left[e^{q\,y}\, a(y); [u, \infty]\right] \leq M_3(q).$$

Hence the lemma.

Now by (24) and Lemma 2, for each $q < p$ and $\varepsilon = \frac{1}{2}(p - q)$,

$$(40)\quad \begin{cases} (LS)\int_0^\infty e^{q\,w}\, s(w)\, d_w a_c(x,w) \\ \qquad = (LS)\int_0^\infty s(w)\, d_w\{e^{q\,w}\, a_c(x,w)\} - (L)\int_0^\infty s(w)\, a_c(x,w)\, q\, e^{q\,w}\, dw, \\ |(LS)\int_0^\infty e^{q\,w}\, s(w)\, d_w a_c(x,w)| \leq \|s\| M_1(q,x) + \|s\|\, q\, M_1(q+\varepsilon, x)/\varepsilon, \end{cases}$$

[7]) See, for example, [10], pp. 92—93.

[8]) [10], pp. 133—134.

so that (39) is continuous. By (38), (40), and the BANACH-STEINHAUS theorem [9],

$$(41) \qquad \left|(LS)\int_0^\infty e^{q\,w}\, s(w)\, d_w a_c(x,w)\right| \leq M_2(q,r)\,\|s\| < \infty$$

for some $x_0 = x_0(q,r)$ and each x in $x \geq x_0$.

To obtain (32) from (41) we need another lemma.

Lemma 3. *If $a(w)$ is continuous and of bounded variation in $\alpha \leq w \leq \beta$, and if $V(w)$ is its weak variation in (α, w) then there is a finite function $\psi(w)$ defined and measurable with respect to $V(w)$ in $\alpha \leq w \leq \beta$, such that for $\alpha \leq u < w \leq \beta$,*

$$(42) \qquad a(w) - a(u) = (LS)\int_u^w \psi(y)\, dV(y),$$

$$(43) \qquad V[a(w); W] = (LS)\int_W |\psi(y)|\, dV(y),$$

$$(44) \qquad |\psi(w)| = 1 \quad \textit{for all points } w \textit{ of } \alpha \leq w \leq \beta.$$

For let $\{(u_n, w_n)\}$ be a sequence of non-overlapping intervals. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(w_n) - a(u_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} V[a(w); (u_n, w_n)],$$

so that $a(w)$ is absolutely continuous with respect to $V(w)$. As $a(w) - a(\alpha)$ is continuous and of bounded variation, it is a signed measure of the interval (α, w), in the sense of [2], p. 118. From $a(w)$ can be constructed a signed measure applying to each BOREL set in $[\alpha, \beta]$ and to other sets. The corresponding measure constructed from $V(w)$ is $V[a(w); W]$. It follows by [2], pp. 128–129, § 31, Theorem B, that there is a function $\psi(w)$ satisfying (42) for each u, w in $\alpha \leq u < w \leq \beta$.

From (42) we obtain (43) by [2], p. 123, result (5). As (43) is also true for the function $|\psi(y)| \equiv 1$, we must therefore have $|\psi(y)| = 1$ except in a set Y of y with $V[a(w); Y] = 0$, so that we can suppose that (44) ist rue. This change in ψ will not alter (42) nor (43).

Continuing with the proof of Theorem 2, necessity, we take the special function

$$s_2(w) \equiv \overline{\operatorname{sgn}}\,\{\psi(x,w)\}\, ch(W; w),$$

where

$$\overline{\operatorname{sgn}}\, z \equiv |z|/z \,(z \neq 0), \qquad \overline{\operatorname{sgn}}\, 0 = 0,$$

where $\psi(x,w)$ is the function $\psi(w)$ of Lemma 3 when $a(w)$ is $a_c(x,w)$, and where $ch(W; w)$ is the characteristic function of the set W, satisfying (30). By (44), for s_2 in S_r,

$$\|s_2\| = 1 + \sup_{w \geq 0} e^{r\,w}\, \mu\{W \cap (w, w+1)\},$$

so that (41) and (43) give (32).

[9] [10], p. 135, § 2, Theorem 1.

To prove (33), from (24), (28), (29), (32), we first take $k=0$, $W=(0,\infty)$ in (32), obtaining, for $q<0$, $x\geq x_0(q,0)$,

$$(LS)\int_0^\infty e^{qw}\,d_w V(x,w)\leq 2M_2(q,0),$$

$$e^{qw}V(x,w)\leq 2M_2(q,0),$$

$$|a_c(x,w)|\leq |a_c(x,0)|+2M_2(q,0)\,e^{-qw}.$$

Then for $0\leq u<w$,

$$\begin{aligned}|e^{qw}a_c(x,w)-e^{qu}a_c(x,u)|&\leq e^{qw}|a_c(x,w)-a_c(x,u)|+|a_c(x,u)|\,(e^{qu}-e^{qw})\\&\leq e^{qw}[V(x,y)]_u^w+\{|a_c(x,0)|+2M_2(\tfrac12 q,0)\,e^{-\frac12 qu}\}\,(e^{qu}-e^{qw})\\&\leq (LS)\int_u^w e^{qy}\,dV_y(x,y)+\{|a_c(x,0)|+2M_2(\tfrac12 q,0)\}\,(LS)\int_u^w e^{-\frac12 qy}\,d_y(-e^{qy}).\end{aligned}$$

It follows from (28), since $a_c(x,0)=a(x,0+)$, and taking $q<0$,

$$M_1(q,x)\leq 2M_2(q,0)+2|a(x,0+)|+4M_2(\tfrac12 q,0),$$

$$\limsup_{x\to\infty} M_1(q,x)\leq 2M_2(q,0)+2+4M_2(\tfrac12 q,0)<\infty.$$

5. Proof of the sufficiency in Theorem 2

We prove first that $B(F;z,x)\to F(z)$ as $x\to\infty$, for z in the half plane of convergence of the integral for $F(z)$. This follows from the sufficiency in [4], Theorem 3, since condition (i) is (28), the first part of (ii) is contained in (24), (iii) is contained in (29), and (iv) in (31). Finally, the second part of (ii) is replaced by (33), the effect of which is to ensure that if the integral for $F(z)$ is convergent at $z=v$ then $B(F;z,x)\to F(z)$ in $R(\mathrm{re}\,v)$, but not necessarily at $z=v$.

From (24) we obtain (26), and from this and (33) it follows that

(45) *$B(F;z,x)$ is uniformly bounded, as $x\to\infty$, in each compact set contained in the half plane of convergence of the integral for $F(z)$.*

(46) We now show that *if $F(z)$ is in S_r then $B(F;z,x)$ is uniformly bounded in each compact set Y contained in $R(\sigma-r)$, whenever the integral for $F(z)$ is convergent in $R(\sigma)$*

and this with the convergence of $B(F;z,x)$ to $F(z)$ in $R(\sigma)$ will give the efficiency $(Z;r)$ of $a(x,w)$ for each $F(z)$ in S_r, by using VITALI's theorem on the convergence of a sequence of uniformly bounded analytic functions.

We can obviously assume throughout that $0<r<p$. As $F(z)$ is in S_r we have $\sigma\leq 0$. If $\sigma<0$ let Y be a compact set contained in $R(\sigma-r)$. Then Y lies at a positive distance from the half plane $\mathrm{re}\,z\leq\sigma-r$, so that there is a q in $0<q<r$ such that Y lies in $R(\sigma-q)$. Let us put $\gamma=q-\sigma-r$. Then by (9),

$$(IP)\int_0^w e^{-zu}\,ds(u)=(IP)\int_0^w e^{(-\gamma-s)u}\,d_u\{F(-\gamma,u)-F(-\gamma)\}. \tag{47}$$

Also we obtain

$$(L)\int_w^{w+1}|F(-\gamma,u)-F(-\gamma)|\,du=(L)\int_w^{w+1}\left|e^{\gamma u}s(u)+(L)\int_u^{\infty}-\gamma e^{\gamma y}s(y)\,dy\right|du$$

$$\leqq(L)\int_w^{w+1}e^{\gamma u}|s(u)|\,du+\gamma(L)\int_w^{w+1}(L)\int_u^{\infty}e^{\gamma y}|s(y)|\,dy\,du.$$

But

$$(L)\int_w^{w+1}e^{\gamma u}|s(u)|\,du\leqq e^{\gamma(w+1)}(L)\int_w^{w+1}|s(u)|\,du=O(e^{(\gamma-r)w}),$$

$$(L)\int_u^{\infty}e^{\gamma y}|s(y)|\,dy=\sum_{n=0}^{\infty}(L)\int_{u+n}^{u+n+1}e^{\gamma y}|s(y)|\,dy=O(e^{(\gamma-r)u}),$$

(48) so that $F(-\gamma,u)-F(-\gamma)$ satisfies (27) with r replaced by $-\gamma+r$. It follows by (47), (48), that it is sufficient to prove (46) for $\sigma=0$.

Let Y be a compact set in $R(-r)$. Then, as in the preceding proof, there is a q in $0<q<r$ such that Y lies in $R(-q)$. Let n be an integer such that

(49) $$n(r-q)>1,$$

and let l be an integer in

(50) $$qn-1<l<rn-1,$$

the existence of such an integer l following from (49). From (27) it follows that for numbers $A>0$, $N>0$,

(51) $$|s(w)|\leqq A,\qquad (L)\int_w^{w+1}|s(u)|\,du\leqq ANe^{-rw}.$$

Let $W_{t,n}$ be the set of w for which

$$A\exp(-tw/n)\geqq|s(w)|>A\exp\{-(t+1)w/n\}.$$

In the set $W_1\equiv\bigcup_{t\geq l+1}W_{t,n}$ we have

$$s(w)=O[\exp\{-(q+\varepsilon)w\}]$$

for some $\varepsilon>0$, since $t/n>q$ by (50). Hence if $s_3(w)\equiv s(w)\,ch(W_1,w)$, the corresponding integral $F(s_3(\cdot);z)\equiv F_2(z)$ will converge in $R(-q)$. Thus by (45) we need only take $t=0,1,2,\ldots,l$, and we have

(52)
$$\begin{cases}
A\exp\{-(t+1)(w+1)/n\}\,\mu\{W_{t,n}\cap(w,w+1)\}\\
\qquad\leqq(L)\int_{W_{t,n}\cap(w,w+1)}|s(u)|\,du\leqq ANe^{-rw},\\
\mu\{W_{t,n}\cap(w,w+1)\}\leqq N\exp\{(t+1)/n\}\exp\{(t+1-rn)w/n\},\\
(LS)\int_0^{\infty}e^{qw}|s(w)-s_3(w)|\,d_wV[a_c(x,w);(0,w)]\\
\leqq\sum_{t=0}^{l}(LS)\int_{W_{t,n}}e^{qw}A\exp(-tw/n)\,d_wV[a_c(x,w);(0,w)]\\
\leqq\sum_{t=0}^{l}AM_2(q-t/n,r-(t+1)/n)\,[1+N\exp\{(t+1)/n\}],<\infty
\end{cases}$$

by (32) for $x \geqq \sup_{0 \leq t \leq l} x_0(q - t/n, r - (t+1)/n)$, since $q - t/n < r - (t+1)/n$, which follows from (49). Also, from (17), (34) for $s(0) - s_3(0)$ not necessarily zero, and the definition (2) of IP-integration,

$$(53)\qquad \begin{cases} B(F - F_2; z, x) = -(PS)\int_0^\infty \{F(z,w) - F_2(z,w)\}\, d_w a(x,w) \\ \qquad = -(PS)\int_0^\infty [e^{-zw}\{s(w) - s_3(w)\} - \\ \qquad\quad - \{s(0) - s_3(0)\} + z F_3(z,w)]\, d_w a(x,w), \end{cases}$$

where

$$(54)\qquad \begin{cases} F_3(z,w) = (IP)\int_0^w e^{-zu}\, d_u \Big[(L)\int_0^u \{s(y) - s_3(y)\}\, dy\Big] \\ \qquad = (IP)\int_0^w -e^{-zu}\, d_u \Big[(L)\int_u^\infty \{s(y) - s_3(y)\}\, dy\Big] \\ \qquad = (L)\int_0^\infty \{s(y) - s_3(y)\}\, dy - z(PS)\int_0^w e^{-zu}\Big[(L)\int_u^\infty \{s(y) - s_3(y)\}\, dy\Big]\, du. \end{cases}$$

By (51), the last PS-integral is convergent as $w \to \infty$, absolutely and uniformly for z in $R(-q)$. Hence from (54),

$$F_3(z,w) = F_3(z) + O(|z|\, e^{(q-r)w}), \qquad \text{where} \qquad F_3(z) \equiv \lim_{w \to \infty} F_3(z,w),$$

uniformly for z in $R(-q)$. Substituting in (53),

$$B(F - F_2; z, x) = \{-s(0) + s_3(0) + z F_3(z)\}\, a(x,0) - \\ - (PS)\int_0^\infty [e^{-zw}\{s(w) - s_3(w)\} + O(|z|^2 e^{(q-r)})]\, d_w a(x,w)$$

and (46) follows from (52), (33).

6. *The general class of functions $F(z)$*

If $a(x,w)$ is of bounded variation in w put[10])

$$Q(x,z) \equiv (L)\int_0^\infty e^{-zw}\, a'(x,w)\, dw.$$

Then $a(x,w)$ will be said to *satisfy condition* A_p if there are numbers $q < p$, with limit-point p, and to each such q there are an integer $n \geqq 0$, and numbers $1 \leq r \leq 2$, $\nu \geqq 0$, $x_0 \geqq 0$, all depending on q, such that

$$(55)\qquad (R)\int_{|\varrho| \geq \nu} |Q^{(n)}(x, -q + i\varrho)|^r\, d\varrho \leq M_4(q) < \infty$$

[10]) Here we denote $\dfrac{\partial}{\partial w} a(x,w)$ by $a^1(x,w)$.

for $x \geqq x_0$, where $M_4(q)$ is independent of x, and where the differentiation is with respect to $i\varrho$.

Theorem 3. *If $a(x, w)$ is a finite* BAIRE *function satisfying* (6) *and condition A_p, then in order that $a(x, w)$ should be efficient $(Z; p)$ for each $F(z)$ satisfying* (7), (8), *with $s(w)$ a* BAIRE *function bounded in each finite interval of $w \geqq 0$, it is necessary and sufficient that* (24) *is true for all $x \geqq 0$, $q < p$; that* (28), (29), (31), (32) *are all true; and that*

$Q(x, z)$ tends to 0 as $x \to \infty$, uniformly for z in each compact set contained in

$$R(-p) \cap CZ. \tag{56}$$

The necessity of (24), (28), (29), (31), (32) follows as in Theorem 2. To prove the necessity of (56) we note that in $R(0)$,

$$\frac{1}{z}(1 - e^{-zw}) = (R)\int_0^w e^{-zw}\,dw, \qquad \frac{1}{z} = (R)\int_0^\infty e^{-zw}\,dw,$$

the sole singularity of the analytic function z^{-1} being at $z = 0$. By hypothesis and then (24),

$$(IP)\int_0^\infty a(x, w)\,d_w\left\{\frac{1 - e^{-zw}}{z}\right\} \to \frac{1}{z},$$

$$(IP)\int_0^\infty a(x, w)\,d_w\,e^{-zw} \to -1,$$

$$-a(x, 0) - \sum_{w>0} e^{-zw}\{a(x, w+) - a(x, w-)\} - (LS)\int_0^\infty e^{-zw}\,d_w\,a_c(x, w) \to -1,$$

so that by (28), (29),

$$(LS)\int_0^\infty e^{-zw}\,d_w a_c(x, w) \to 0 \tag{57}$$

as $x \to \infty$, uniformly in each compact set in $R(-p) \cap CZ$.

Now let $W(x)$ be the set of measure zero that contains all the variation of

$$a_c(x, w) - (L)\int_0^w a'(x, u)\,du.$$

Take a sequence $\{x_n\}$ of x tending to infinity. Then the set

$$W_2 \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} W(x_n)$$

is of measure zero, and the function $s_4(w) \equiv ch(W_2; w)$ satisfies (27) for all r. Further, for all z in $R(0)$,

$$F_4(z) \equiv F(s_4(\cdot); z) = -s_4(0),$$

since

$$F_4(z, w) = e^{-zw}s_4(w) - s_4(0).$$

Hence by Theorem 2, sufficiency, and (28), (29),

$$
\begin{aligned}
&(LS)\int_0^\infty e^{-zw}\,d_w\,a_c(x_n,w) - (L)\int_0^\infty e^{-zw}\,a'(x_n,w)\,dw \\
&\quad = (LS)\int_0^\infty e^{-zw}\,ch(W_2;w)\,d_w\,a_c(x_n,w) \\
&\quad = (LS)\int_0^\infty \{s_4(0)+F_4(z,w)\}\,d_w\,a_c(x_n,w) \\
&\quad = -\,s_4(0)\,a_c(x_n,0) - \sum_{w>0} F_4(z,w)\,\{a(x_n,w+)-a(x_n,w-)\} - \\
&\qquad -(IP)\int_0^\infty a(x_n,w)\,d_w F_4(z,w) \to -\,s_4(0)+s_4(0)=0
\end{aligned}
$$

as $n\to\infty$, and is uniformly bounded in each compact set contained in $R(-p)$. This is true for each sequence $\{x_n\}$ tending to infinity, and so is true as $x\to\infty$. Hence (56) is true, using (57).

7. Proof of the sufficiency in Theorem 3

Let Y be a compact set in $R(\sigma-p)$. Then we can find $q<p$ such that for all z in Y, $\operatorname{re} z\geqq\sigma-p$. Taking $v=\sigma+\varepsilon$ in (10) we obtain

$$F(z,w)=O\{e^{(q+\varepsilon)w}\} \tag{58}$$

as $w\to\infty$, uniformly for z in Y, for each $\varepsilon>0$. There is an $\varepsilon>0$ such that $q+2\varepsilon<p$, so that from (24),

$$|a(x,w)\,F(z,w)| = O\{e^{-(q+2\varepsilon)w}\,e^{(q+\varepsilon)w}\} = o(1)$$

as $w\to\infty$. By Theorem 1 the integral for $B(F;z,x)$ is convergent in Y. Thus

$$
\left\{
\begin{aligned}
&B(F;z,x) = -\,(PS)\int_0^\infty F(z,w)\,d_w a(x,w) \\
&= -\sum_{w>0} F(z,w)\,\{a(x,w+)-a(x,w-)\} - (LS)\int_0^\infty F(z,w)\,d_w a_c(x,w).
\end{aligned}
\right. \tag{59}
$$

Using (29) and (58), the first term is uniformly bounded in Y and tends to 0 there as $x\to\infty$. Further, following a proof similar to that at the end of section 6, we can easily show that

$$(LS)\int_0^\infty F(z,w)\,d_w a_c(x,w) - (L)\int_0^\infty F(z,w)\,a'(x,w)\,dw \to 0$$

as $x\to\infty$, and is uniformly bounded in Y. Hence from (59),

$$
\left\{
\begin{aligned}
&B(F;z,x) = o(1) - (L)\int_0^\infty F(z,w)\,a'(x,w)\,dw \\
&\qquad = o(1) + B^*(F;z,x),
\end{aligned}
\right. \tag{60}
$$

as $x\to\infty$, the $o(1)$ being uniformly bounded in Y, where $B^*(F;z,x)$ is the $B(F;z,x)$ obtained by replacing $a(x,w)$ by

$$a^*(x,w) \equiv a(x,0+) + (L)\int_0^w a'(x,u)\,du.$$

We can also replace $s(w)$ by any other BAIRE function $s_5(w)$, provided that $s(w)-s_5(w)$ satisfies (27) for $r=p$. In particular, we can put

$$s(w)=0 \quad \text{for} \quad 0\leq w\leq 1. \tag{61}$$

The condition (61) will be useful later. Let us consider the integral

$$G(z,x,w)\equiv \frac{1}{2\pi i}(R)\int_{-w}^{w}\frac{F(z+i\varrho+q)\,Q(x,-i\varrho-q)}{\varrho-iq}\,d\varrho. \tag{62}$$

To ensure that $z+i\varrho+q$ is in the region of convergence of the LAPLACE-STIELTJES integral for $F(z)$, we take

$$\operatorname{re}(z+i\varrho+q)>\sigma, \qquad \operatorname{re} z>\sigma-q,$$

since ϱ is real. As $q<p$, and as q is arbitrarily near to p, we can deal with all points of the region $R(\sigma-p)$, but, in general, with no points outside that region. From (10), with $v=\operatorname{re} z+q-\varepsilon$, where $\varepsilon=\frac{1}{2}(\operatorname{re} z+q-\sigma)>0$, we obtain (58) with $q+\varepsilon$ replaced by $q-\varepsilon$. Hence from (11),

$$F(z+i\varrho+q)=(i\varrho+q)\,(L)\int_0^\infty e^{-(i\varrho+q)w}F(z,w)\,dw$$

the integral being absolutely convergent, and $e^{-qw}F(z,w)$ is bounded and $L^2(0,\infty)$.

Also let $q+\delta<p$. Then by (24), and Lemma 2 for $q+\delta$,

$$e^{qw}|a'(x,w)|\leq q\,e^{qw}|a(x,w)|+|q\,e^{qw}a(x,w)+e^{qw}a'(x,w)|,$$

$$(L)\int_0^\infty e^{qw}|a'(x,w)|\,dw\leq q\,\delta^{-1}M_1(q+\delta,x)+M_1(q,x)<\infty,$$

and $e^{qw}a'(x,w)$ is in $L^1(0,\infty)$, for each $x\geq 0$, $q<p$. Hence applying a PARSEVAL Theorem, TITCHMARSH [8], Theorem 70, p. 94, to the functions $e^{qw}a'(x,w)$ and $e^{qw}F(z,-w)$, where $a'(x,w)$ and $F(z,w)$ are defined to be zero in $w<0$, we see that

$$(C,1)\lim_{w\to\infty}G(z,x,w)=\lim_{w\to\infty}\frac{1}{2\pi i}(R)\int_{-w}^{w}\left(1-\frac{|\varrho|}{w}\right)\frac{F(z+i\varrho+q)\,Q(x,-i\varrho-q)}{\varrho-iq}\,d\varrho$$

$$=(L)\int_0^\infty F(z,w)\,a'(x,w)\,dw=-B^*(F;z,x).$$

We now put $-v=i\varrho+q$, so that

$$B^*(F;z,x)=\frac{1}{2\pi i}(R)\int_{\vartheta}\frac{F(z-v)\,Q(x,v)}{v}\,dv\,(C,1) \tag{63}$$

for the path ϑ given by $\operatorname{re} v=-q$, $-\infty<\operatorname{im} v<\infty$.

By (13), (14), (15), (16), we can displace a finite part of the path ϑ to the right, so that it surrounds the set Z and passes to the right of the origin,

and yet is unaltered in $|\operatorname{im} v| \geqq \delta$ for some $\delta > 0$. Let us denote the new path by φ, and let $\varphi(w)$ be the finite part of φ that terminates at $v = -q \pm iw$ $(w \geqq \delta)$.

From (12), Z is closed, and also the set of points $\alpha + i\beta$ of $F(z)$ is closed, so that $CH(F; Z)$ is closed. Let Y be a compact set lying in

$$H(F; Z) \cap R(\sigma - p).$$

Then Y lies at a positive distance Δ from the sum of $CH(F; Z)$ and the half plane given by $\operatorname{re} v \leqq \sigma - p$, so that if each point of $\varphi(\delta)$ is nearer than $\Delta/2$ to Z, we can use the same path φ for each point z of Y. In this case $F(z-v)$ is bounded uniformly for z in Y and v on $\varphi(w)$.

Also $Q(x, v) \to 0$ as $x \to \infty$, uniformly for v on $\varphi(w)$, though not necessarily for v on φ, by (56).

Displacing the path from ϑ to φ we pass over a pole at $v = 0$, the residue of the integrand being $F(z)\, Q(x, 0)$. Since

$$Q(x, 0) = -a^*(x, 0) = -a(x, 0+) \to -1$$

as $x \to \infty$, the residue tends to $-F(z)$. Thus by (63),

$$(64)\quad \begin{cases} B^*(F; z, x) = F(z)\, a(x, 0+) - \dfrac{1}{2\pi i}(R)\displaystyle\int_{\varphi(w)} \frac{F(z-v)\, Q(x, v)}{v}\, dv - \\ \qquad - \lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{1}{2\pi i}(R) \displaystyle\int_{\varphi(u)-\varphi(w)} \left(1 - \frac{|\operatorname{im} v|}{u}\right) \frac{F(z-v)\, Q(x, v)}{v}\, dv, \\ \qquad \lim\limits_{x \to \infty} B^*(F; z, x) \\ \qquad = F(z) - \lim\limits_{x \to \infty} \lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{1}{2\pi i}(R) \displaystyle\int_{\varphi(u)-\varphi(w)} \left(1 - \frac{|\operatorname{im} v|}{u}\right) \frac{F(z-v)\, Q(x, v)}{v}\, dv, \end{cases}$$

uniformly for z in Y. Thus by (60), to show that $a(x, w)$ is efficient $(Z; p)$ for $F(z)$ it is sufficient to show that the last double limit is 0, uniformly for z in Y. This is where we use condition A_p.

By (11),

$$(R)\int_{-q-i\varrho}^{-q+iu} \frac{F(z-\zeta)}{\zeta}\, d\zeta = (R)\int_{-q-i\varrho}^{-q+iu} \left\{ -(L)\int_0^\infty e^{\zeta w} F(z, w)\, dw \right\} d\zeta$$

$$= (L)\int_0^\infty \frac{F(z, w)}{w}\, e^{-qw}\left(e^{-i\varrho w} - e^{iuw}\right) dw.$$

The inversion is possible since the double integral is absolutely convergent. By (61),

$$(65)\qquad F(z, w) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leqq w \leqq 1,$$

so that we can take $\varrho \to \infty$ and use the RIEMANN-LEBESGUE Theorem, obtaining

$$(66)\qquad (R)\int_{-q-i\infty}^{-q+iu} \frac{F(z-\zeta)}{\zeta}\, d\zeta = -(L)\int_0^\infty \frac{F(z, w)}{w}\, e^{(-q+iu)w}\, dw.$$

Thus we can obviously integrate n times between $-q-i\infty$ and $-q+iu$, in which case $w^{-1}F(z,w)$ in (66) is replaced by $w^{-n}F(z,w)$. Integrating by parts n times, we obtain

$$(67)\quad \begin{cases} (R)\int\limits_{-q+iw}^{-q+iu} \frac{F(z-v)}{v}\,Q(x,v)\,dv = \left[Q(x,v)\,F_{(1)}(z,v) - Q'(x,v)\,F_{(2)}(z,v) + \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + (-)^{n-1}\,Q^{(n-1)}(x,v)\,F_{(n)}(z,v)\right]_{v=-q+iw}^{v=-q+iu} \\ \qquad\qquad + (-)^n\,(R)\int\limits_{-q+iw}^{-q+iu} Q^{(n)}(x,v)\,F_{(n)}(z,v)\,dv, \end{cases}$$

where

$$F_{(0)}(z,v) \equiv \frac{F(z-v)}{v}, \qquad F_{(m)}(z,v) \equiv (R)\int\limits_{-q-i\infty}^{v} F_{(m-1)}(z,\zeta)\,d\zeta \qquad (m \geqq 1).$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{(m)}(z,-q+iu) = 0$$

for $m = 1, 2, \ldots, n$, by the RIEMANN-LEBESGUE Theorem. Also, as

$$e^{(q+\varepsilon)w}\,|a'(x,w)|$$

is in $L^1(0,\infty)$ for $q+\varepsilon < p$,

$$|Q^{(m)}(x,-q+iu)| \leqq (L)\int\limits_0^\infty w^m e^{qw}\,|a'(x,w)|\,dw$$

$$= O\left((L)\int\limits_0^\infty e^{(q+\varepsilon)w}|a'(x,w)|\,dw\right) = O(1)$$

for $m = 0, 1, \ldots, n-1$, as $u \to \infty$. Hence from (67) we obtain

$$(68)\quad \begin{cases} (R)\int\limits_{-q+iw}^{-q+i\infty} \frac{F(z-v)}{v}\,Q(x,v)\,dv = -Q(x,-q+iw)\,F_{(1)}(z,-q+iw) + \cdots \\ \qquad + (-)^n\,Q^{(n-1)}(x,-q+iw)\,F_{(n)}(z,-q+iw) + \\ \qquad + (-)^n\,(R)\int\limits_{-q+iw}^{-q+i\infty} Q^{(n)}(x,v)\,F_{(n)}(z,v)\,dv. \end{cases}$$

Now by (56) and CAUCHY's integrals we see that for fixed $w > 0$,

$$(69)\qquad Q^{(m)}(x,-q+iw) \to 0 \quad \text{as} \quad x \to \infty \qquad (0 \leqq m < n).$$

Also, by (55), we see that $Q^{(n)}(x,-q+i\varrho)$ is in $L^r(\nu,\infty)$ and in

$$(70)\qquad L^r(-\infty,-\nu).$$

From (58), with the q there taken to be greater than $\sigma - \operatorname{re} z$, and from (65), we see that

$$\sup_{z\in Y}(L)\int\limits_0^\infty |w^{-n}F(z,w)\,e^{-kw}|^r\,dw < \infty \qquad (r > 0,\ k > \sigma - \operatorname{re} z).$$

Hence if $1<r\leq 2$ and if r' is defined by $r+r'=rr'$, we have by [8], p. 96, Theorem 74, (4.1.2),

$$\sup_{z\in Y}(R)\int_{-\infty}^{\infty}|F_{(n)}(z,-k+iu)|^{r'}du<\infty \qquad (k>\sigma-\operatorname{re} z).$$

Hence putting $k=q<p$, and also using (68), (69), (70), we obtain, for $w\geq r$,

$$\limsup_{x\to\infty}\left|(R)\int_{-q+iw}^{-q+i\infty}\frac{F(z-v)}{v}\,Q(x,v)\,dv\right| = \limsup_{x\to\infty}\left|(R)\int_{-q+iw}^{-q+i\infty}Q^{(n)}(x,v)\,F_{(n)}(z,v)\,dv\right|$$

$$\leq \limsup_{x\to\infty}\left\{(R)\int_{w}^{\infty}|Q^{(n)}(x,-q+i\varrho)|^{r}\,d\varrho\right\}^{\frac{1}{r}}\left\{(R)\int_{w}^{\infty}|F_{(n)}(z,-q+i\varrho)|^{r'}\,d\varrho\right\}^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq M_1^{1/r}(q)\left\{(R)\int_{w}^{\infty}|F_{(n)}(z,-q+i\varrho)|^{r'}\,d\varrho\right\}^{\frac{1}{r'}}.$$

Similarly for the range $-q-i\infty$ to $-q-iw$.

For $r=1$ we note that $F_{(n)}(z,-q+i\varrho)$ is bounded in ϱ, uniformly for z in Y. A similar result follows in this case.

From (64) it follows that

$$B^*(F;z,x)\to F(z) \text{ as } x\to\infty, \text{ uniformly for } z \text{ in } Y.$$

8. Examples of functions $Q(x,z)$, and the connection with OKADA's *theory*

If we transform the complex plane minus the line $v=\operatorname{re} v\geq 1$ into the plane minus the line $z=\operatorname{re} z\leq 0$, and put

$$Q(x,z)\,E(x)=-E(x,v),$$

where $E(v)$ is an integral function occurring in COOKE [1], Theorem (8.2, III), p. 184, Theorem (8.3, I), p. 188, it seems likely that some of these functions $Q(x,z)$ will satisfy the conditions of Theorem 3. Two such transformations are $v=e^{-z}$, $v=1-z$.

Alternatively, we can transform CZ into $|v|<1$, and $Q(x,z)$ into $Q_1(x,v)$, the latter tending to 0 as $x\to\infty$, uniformly in each circle $|v|\leq 1-\varepsilon$ for $\varepsilon>0$. Theoretically, the search for such functions $Q(x,z)$ is thereby simplified. A simple example is the following.

If $0<\varepsilon<1$, $-v^x\to 0$ uniformly in $|v|\leq 1-\varepsilon$ as $x\to\infty$. Putting $v=(1+z)^{-1}$, so that $|v|<1$ becomes $|z+1|>1$, we obtain

$$Q(x,z)=-(1+z)^{-x}=-\Gamma^{-1}(x)\,(R)\int_{0}^{\infty}e^{-zu}e^{-u}u^{x-1}\,du,$$

and a suitable function $a(x,w)$ is given by

$$a(x,w)=\Gamma^{-1}(x)\,(R)\int_{w}^{\infty}e^{-u}u^{x-1}\,du,$$

$$a(n,w)=\left\{1+w+\frac{w^2}{2!}+\cdots+\frac{w^{n-1}}{(n-1)!}\right\}e^{-w}$$

for integers $n \geqq 1$. The integral for $Q(x, z)$ is convergent in $R(-1)$, so that $p = 1$. Also

$$|Q(x, z)| = \{(\mathrm{re}\, z + 1)^2 + (im\, z)^2\}^{-\frac{1}{2}x}$$

so that Q satisfies condition A_1 with

$$q < 1, \quad n = 0, \quad r = 1, \quad x_0 = 2, \quad \nu = 1.$$

Taking Z as including the region given by $|z+1| \leqq 1$, it is easy to verify that the conditions of Theorem 3 are satisfied. Thus $a(x, w)$ is efficient $(Z; 1)$ for all $F(z)$ given by (7), (8), the value of $a(n, w)$ being particularly simple, and we obtain

$$B(F; z, n) = F(z+1) - F'(z+1) + \frac{F''(z+1)}{2!} - \cdots + (-)^{n-1} \frac{F^{(n-1)}(z+1)}{(n-1)!},$$

the n-th partial sum of a TAYLOR series.

Further examples can be obtained in the following way.

Theorem 4. *Let $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\xi > 0$, $\eta > 0$, with $-\alpha - i\xi$, $-\beta + i\eta$ in CZ, where Z is an H-set, and let Z_1 be the strip*

$$-\xi \leqq \mathrm{im}\, z \leqq \eta, \qquad \mathrm{re}\, z \geqq -\max(\alpha, \beta).$$

For each x let $J(x, z)$ be regular for z in Z_1, apart from a simple pole at $z = 0$, with residue tending to -1 as $x \to \infty$. Further, let $J(x, z) \to 0$ as $x \to \infty$, uniformly for each compact set contained in $Z_1 - Z$. If $F(z)$ is convergent in $R(\sigma)$ then

$$(71) \quad F(z) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\pi i} (R) \int_\gamma F(z-v)\, J(x, v)\, dv = \lim_{x \to \infty} (IP) \int_0^\infty a(x, w)\, d_w F(z, w),$$

uniformly for z in each compact set contained in

$$H(F; Z) \cap R(\sigma - \min(\alpha, \beta)),$$

where γ is the line from $-\alpha - i\xi$ to $-\beta + i\eta$, and where

$$(72) \qquad a(x, w) \equiv \frac{1}{2\pi i} (R) \int_\gamma e^{vw} J(x, v)\, dv.$$

Thus the function given by (72) is efficient $(Z; p)$ for all $F(z)$ satisfying (7), (8), where $p = \min(\alpha, \beta)$.

To prove the efficiency $(Z; p)$ we deform γ to a new path in the same way as part of ϑ was deformed to become $\varphi(\delta)$. Further, by (11) and the absolute convergence of the integrals, if z lies in $R(\sigma - \min(\alpha, \beta))$,

$$\begin{aligned}
(R) \int_\gamma F(z-v)\, J(x, v)\, dv &= -(R) \int_\gamma \left\{(L) \int_0^\infty v\, e^{vw} F(z, w)\, dw\right\} J(x, v)\, dv \\
&= (L) \int_0^\infty F(z, w) \left\{-(R) \int_\gamma v\, e^{vw} J(x, v)\, dv\right\} dw \\
&= (LS) \int_0^\infty F(z, w)\, d_w \left\{-(R) \int_\gamma e^{vw} J(x, v)\, dv\right\} \\
&= (IP) \int_0^\infty \left\{(R) \int_\gamma e^{vw} J(x, v)\, dv\right\} dF(z, w),
\end{aligned}$$

giving the second part of (71) if $a(x, w)$ is given by (72). This $a(x, w)$ is, in particular, efficient $(Z; p)$ for functions $F(z)$ of class S_r, for all r, so that by Theorem 2, the conditions (24), (28), (29), (31), (32) are satisfied. Further, $a(x, w)$ satisfies condition A_p, since

$$2\pi i\, Q(x,z) = (L)\int_0^\infty e^{-zw}\left\{(R)\int_\gamma v\, e^{vw} J(x,v)\, dv\right\} dw$$

$$= (R)\int_\gamma v\, J(x,v)\left\{(R)\int_0^\infty e^{(v-z)w}\, dw\right\} dv$$

$$= (R)\int_\gamma \frac{v}{z-v} J(x,v)\, dv,$$

if $\mathrm{re}\,(v-z) < 0$ for v on γ, and so $\mathrm{re}\, z > -\min(\alpha, \beta)$. As $J(x, v)$ is uniformly convergent on γ as $x \to \infty$, then $J(x, v)$ is uniformly bounded for v on γ and $x \geqq x_0$, for some x_0. Thus

$$Q(x,z) = O(\max|z-v|^{-1}) = O(|z|^{-1}) \quad \text{as} \quad |\mathrm{im}\, z| \to \infty,$$

and satisfies condition A_p with $n = 0$, $x \geqq x_0$, $r = 2$, ν large. Thus it follows that Theorem 4 is a special case of Theorem 3, sufficiency.

It can easily be proved from (72) that $a(x, w)$ *is an integral function of order* < 1, *or of order* 1, *type*

$$\leqq \max(\alpha, \beta) + \max(\xi, \eta). \tag{73}$$

Specializing still further, let us take

$$\alpha = \beta = p,\ \xi = \eta = \pi,\ J(x,z) = (1-e^z)^{-1} K(x, e^{-z}),\ K(x,v) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(x)\, v^n. \tag{74}$$

Let Y_1 denote the region $|v| \leqq e^p$, and let Y be the set of $v = e^{-z}$ for which z lies in Z. Then this special $J(x, z)$ satisfies the conditions of Theorem 4 if and only if

$$K(x,v) \text{ is convergent in } |v| \leqq e^p, \tag{75}$$

$$K(x,1) \to 1 \text{ as } x \to \infty, \text{ and} \tag{76}$$

$$K(x,v) \to 0 \text{ as } x \to \infty, \text{ uniformly for each compact set contained in } Y_1 - Y. \tag{77}$$

Further, in this case, for integers n,

$$a(x,n) = \sum_{m=n}^{\infty} k_m(x),\ k_n(x) = a(x,n) - a(x,n+1). \tag{78}$$

This special case corresponds to the theory of [6], p. 68, § 3, Satz III, OKADA's summation of TAYLOR series by convergence factors. *Conditions* (75), (76), (77) *are necessary and sufficient in order that*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(x,n)\, f_n v^n$$

should converge in $|v| \leqq e^p r$, *and should tend to* $f(v)$ *as* $x \to \infty$, *uniformly in each compact set contained in that part of the partial star domain of* $f(z)$ *cor-*

responding to Y that is contained in $|v| \leq e^{\flat} r$, for all

$$f(v) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n v^n,$$

convergent in $|v| \leq r$. Thus by (78), OKADA's Theorem is a special case of Theorem 4.

Further, from each convergence factor $a(x, n)$ satisfying OKADA's Theorem we can put

$$k_n(x) = a(x, n) - a(x, n+1)$$

and so construct $J(x, z)$ as in (74). Substituting in (72) we obtain a convergence factor $a(x, w)$ depending on two continuous parameters $x \geqq 0$, $w \geqq 0$, and coinciding with $a(x, n)$ for integer values n of w, and satisfying the conditions of Theorem 3. Thus Theorem 4 is an important special case of Theorem 3, sufficiency. However, (73) shows that the convergence factors produced by (72) are of a very special kind.

Finally, we may note difficulties in the weakening or removal of condition A_p in Theorem 3. We know by (56) that $Q(x, v)$ tends to 0 as $x \to \infty$, uniformly for v on any finite part of the path φ. But without an extra condition on the product

$$(\varrho - iq)^{-1} F(z + i\varrho + q)\, Q(x, -i\varrho - q)$$

as a function of ϱ we cannot prove that the integral over $|\varrho| \geqq w$ tends to 0 as $x \to \infty$, for fixed $w \geqq \delta$. The extra condition is supplied by (55). The value of r there cannot in general be taken greater than 2. For although

$$w^{-n} F(z, w)\, e^{-qw} = O(e^{-\varepsilon w})$$

for some $\varepsilon > 0$, we cannot show in general that the function $F_{(n)}(z, -q + iu)$ of u is in $L^k(-\infty, \infty)$ for $k < 2$.

References

[1] COOKE, R. G.: Infinite matrices and sequence spaces. London: Macmillan 1950. — [2] HALMOS, P. R.: Measure theory. New York 1950. — [3] HENSTOCK, R.: The efficiency of matrices for Taylor series. J. London Math. Soc. **22**, 104—107 (1947). — [4] HENSTOCK, R.: The efficiency of convergence factors for functions of a continuous real variable. J. London Math. Soc. **30**, 273—286 (1955). — [5] HENSTOCK, R.: On Ward's Perron-Stieltjes integral. To be published, Canadian J. of Mathematics. — [6] OKADA, Y.: Über die Annäherung analytischer Funktionen. Math. Z. **23**, 62—71 (1925). — [7] SAKS, S.: Theory of the integral, 2nd English ed. Warsaw 1937. — [8] TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the theory of Fourier integrals, 2nd ed. Oxford 1948. — [9] WARD, A. J.: The Perron-Stieltjes integral. Math. Z. **41**, 578—604 (1936). — [10] ZAANEN, A. C.: Linear analysis. Amsterdam 1953.

Department of Pure Mathematics, The Queen's University, Belfast (Nord-Irland)

(Eingegangen am 23. Mai 1956)

WALTER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 32—37 (1957)

Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta^p u = f(u)$

Von
WOLFGANG WALTER

1. Es ist bekannt, daß die Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$ keine ganzen Lösungen besitzt, wenn $f(s)$ stetig und positiv ist und für große s stärker wächst als $s^{1+\alpha}$ mit $\alpha > 0$ [2], [3], [5][1]). Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, den analogen Satz für die Differentialgleichung

$$\Delta^p u = f(u) \quad (p \geq 2) \tag{1}$$

zu beweisen. Der Operator Δ^p ist wie üblich definiert durch

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}, \qquad \Delta^p = \Delta(\Delta^{p-1}).$$

Unter einer ganzen Lösung verstehen wir eine im ganzen n-dimensionalen Euklidischen Raum R_n $2p$-mal stetig differenzierbare Lösung $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ der vorgelegten Differentialgleichung.

Es wird sich erweisen, daß man ohne weitere Voraussetzungen über $f(s)$ nur im Falle $n = 2$ zum Ziele kommt. Bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen muß man darüber hinaus $f(s) \geq \delta > 0$ voraussetzen. Das ist nicht nur ein Mangel der Beweismethode; vielmehr läßt sich zeigen, daß diese zusätzliche Bedingung wesentlich für die Gültigkeit des Satzes ist. Sie tritt auch bei HAVILAND [2], der den Fall $p = 1$ behandelt, auf; doch ist sie da, wie der Verfasser [3] gezeigt hat, entbehrlich.

2. Satz. *Die Funktion $f(s)$ sei für $-\infty < s < \infty$ stetig und positiv; es gebe ferner zwei positive Konstanten α und s_0, so daß*

$$f(s) \geq s^{1+\alpha} \quad \text{für} \quad s \geq s_0 \tag{2}$$

ist.

Dann gibt es im R_2 keine ganze Lösung $u(x_1, x_2)$ der Differentialgleichung (1). *Ist außerdem $f(s) \geq \delta > 0$, so existiert auch für $n > 2$ keine ganze Lösung $u(x_1, \ldots, x_n)$. Ohne diese zusätzliche Voraussetzung wird die Behauptung im allgemeinen falsch.*

Beweis. Entgegen der Behauptung sei $u(x)$ eine ganze Lösung von (1) mit $p \geq 2$. Die Funktion $v = \Delta^{p-1} u$ ist nicht nach oben beschränkt; das folgt leicht aus $\Delta v > 0$ $(n = 2)$ bzw. $\Delta v \geq \delta > 0$ $(n > 2)$[2]). Durch eine lineare Trans-

[1]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

[2]) Für $n = 2$ ist der Mittelwert von v bekanntlich eine konvexe Funktion von $\log R$; für $n > 2$ wächst er unter den angegebenen Voraussetzungen sogar wie R^2.

formation können wir also erreichen, daß $v(0) = \Delta^{p-1} u(0) > 0$ ist. Der Mittelwert von u für die Kugeloberfläche vom Radius R

$$m(R, u) = \frac{1}{\omega R^{n-1}} \oint_{|x|=R} u(x)\, dx \qquad (\omega = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2))$$

läßt sich in eine Reihe entwickeln (s. [4] § 1):

$$(3) \qquad m(R, u) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ni} R^{2i} \Delta^i u(0) + \int_0^R m(r, \Delta^p u)\, r^{n-1} H_p(r, R)\, dr,$$

wobei

$$a_{ni} = \frac{1}{2^i i!\,(n+2)\dots(n+2i-2)}$$

und

$$(4) \quad H_p(r, R) = A_p \int_r^R [(R^2 - s^2)(s^2 - r^2)]^{p-1} s^{3-n-2p}\, ds, \qquad A_p = 4^{1-p}(p-1)!^{-2}$$

ist. Die folgenden Rechnungen vereinfachen sich, wenn wir statt $m(R, u)$ die Funktion $M(T, u) = m(\sqrt{T}, u)$ einführen. Aus (3) wird dann, wie die Transformation $T = R^2$, $t = r^2$ zeigt,

$$(5) \quad M(T, u) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ni} T^i \Delta^i u(0) + \int_0^T M(t, \Delta^p u)\, t^{m-1} H_p'(t, T)\, dt \quad (m = n/2)$$

mit

$$(6) \qquad H_p'(t, T) = A_p' \int_t^T [(T - z)(z - t)]^{p-1} z^{1-m-p}\, dz, \qquad A_p' = A_p/4.$$

Die Ableitungen von $M(T, u)$ ergeben sich wegen

$$(7) \quad \begin{cases} D^k H_p'(t, T) = A_p'(p-1)\cdots(p-k) \displaystyle\int_t^T (T - z)^{p-k-1} (z - t)^{p-1} z^{1-m-p}\, dz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (D^k = d^k/d\,T^k) \end{cases}$$

zu

$$(8) \qquad D^k M(T, u) = D^k \sum_{i=0}^{p-1} a_{ni} T^i \Delta^i u(0) + \int_0^T M(t, \Delta^p u)\, t^{m-1} D^k H_p'(t, T)\, dt$$

für $0 \leqq k \leqq p-1$. Insbesondere ist, da $\Delta^{p-1} u(0)$ nach Voraussetzung positiv ist,

$$(9) \quad D^{p-1} M(T, u) \geqq (p-1)!\, a_{n,p-1} \Delta^{p-1} u(0), \qquad \text{also} \qquad \lim_{T \to \infty} M(T, u) = \infty.$$

Wir betrachten den Ausdruck

$$(10) \qquad J(t, T, m, p) = T^p t^{m-1} (T - t)^{1-2p} \int_t^T [(T - z)(z - t)]^{p-1} z^{1-m-p}\, dz$$

für $0 < t \leqq T$, $p \geqq 2$, $2m = n \geqq 2$. Für $m = p + 1 + i$, $i = 0, 1, \dots$ läßt sich das Integral explizit angeben; es ist (s. [1] Formel 421.5)

$$(11) \qquad J(t, T, p+1+i, p) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (t/T)^j B(p+j, p+i-j) \geqq B(p, p+i) > 0,$$

wo $B(p, q) = \Gamma(p)\,\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ die Betafunktion bedeutet. Ferner ist

$$\frac{\partial J(t, T, m, p)}{\partial m} = T^p t^{m-1}(T-t)^{1-2p} \int_t^T [(T-z)(z-t)]^{p-1} z^{1-m-p} \log t/z \, dz \leqq 0. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt, daß (für festes m und p) $J(t, T, m, p)$ eine positive untere Schranke hat, d.h. nach (10), daß

$$(T-t)^{2p-1} \leqq c\, T^p t^{m-1} H_p'(t, T) \quad \text{für } 0 < t \leqq T \qquad (c = c(m, p) > 0) \tag{13}$$

ist.

Zu $f(s)$ gibt es eine für alle s positive, monoton wachsende, konvexe Funktion $g(s) \leqq f(s)$, welche für große s mit der Funktion $s^{1+\alpha}$ übereinstimmt (vgl. [3] S. 96/97). Es sei $t_1 > 0$ so gewählt, daß $\sum_{i=0}^{p-1} a_{ni} T^i \Delta^i u(0) > 0$ für $T > t_1$ ist. Dann hat die Funktion

$$N(T) = \int_{t_1}^T (T-t)^{2p-1} g\left(M(t, u)\right) dt \tag{14}$$

die Eigenschaften

$$D^i N(T) > 0 \text{ für } 0 \leqq i \leqq 2p,\ T > t_1;\quad D^{2p} N(T) = (2p-1)!\, g\left(M(T, u)\right). \tag{15}$$

Aus den Eigenschaften von g ergibt sich (vgl. etwa [3] S. 96)

$$g\left(M(T, u)\right) \leqq M\left(T, g(u)\right) \leqq M\left(T, f(u)\right) = M(T, \Delta^p u)$$

und hieraus nach (5), (13) und (14)

$$N(T) \leqq c\, T^p M(T, u). \tag{16}$$

Es ist also

$$D^{2p} N(T) = (2p-1)!\, g\left(M(T, u)\right) \geqq (2p-1)!\, g\left(N(T)/c\, T^p\right).$$

Nach den Ungleichungen (15) wächst $N(T)$ stärker als T^p; für große T dürfen wir demnach $g(s)$ durch $s^{1+\alpha}$ ersetzen und erhalten so

$$C\, T^{p+\alpha p} D^{2p} N(T) \geqq N(T)^{1+\alpha} \quad \text{mit} \quad C = c^{1+\alpha}/(2p-1)!. \tag{17}$$

Hierbei kann o. B. d. A. $0 < \alpha < 1$ angenommen werden. Die Funktion $N_1(T) = N(e^T)$ genügt dann wegen

$$D^{2p} N_1(T) \geqq e^{2pT} N^{(2p)}(e^T)$$

von einer Stelle an, etwa für $T \geqq t_2$, der Ungleichung

$$D^{2p} N_1(T) \geqq N_1(T)^{1+\alpha}. \tag{18}$$

Die beiden folgenden Hilfssätze werden zeigen, daß es eine solche Funktion $N_1(T)$ nicht geben kann.

Hilfssatz 1. *Es seien zwei für $t \geqq t_0$ k-mal $(k \geqq 2)$ stetig differenzierbare positive Funktionen $y(t)$ und $z(t)$ gegeben, für welche*

$$y^{(k)} = y^{1+\alpha};\quad z^{(k)} \geqq z^{1+\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{19}$$

und

$$0 < y^{(i)}(t_0) < z^{(i)}(t_0) \qquad \text{für } i = 0, \ldots, k$$

ist. Dann ist

$$y(t) < z(t) \qquad \text{für } t \geqq t_0.$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß y und z monoton wachsend gegen ∞ streben. Es ist zu zeigen, daß $w(t) = z(t) - y(t)$ positiv ist. An der Stelle t_0 ist das nach Voraussetzung der Fall. Angenommen die Behauptung sei falsch und t_1 sei die erste Nullstelle von $w(t)$. Dann ist für $t_0 < t < t_1$

$$w^{(k)}(t) = z^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) \geqq z^{1+\alpha} - y^{1+\alpha} > 0.$$

Deshalb sind auch alle Ableitungen niedrigerer Ordnung von $w(t)$ positiv in (t_0, t_1). Insbesondere ist $w(t)$ monoton wachsend im Widerspruch zur Annahme $w(t_1) = 0$.

Hilfssatz 2. *Ist $z(t)$ k-mal stetig differenzierbar und*

$$z^{(k)}(t) \geqq z^{1+\alpha}(t) \qquad \text{für } t \geqq t_0, \qquad z^{(i)}(t_0) > 0 \qquad \text{für } i = 0, \ldots, k,$$

so gilt $\lim\limits_{t \to t_1} z(t) = \infty$ für ein passend gewähltes $t_1 < \infty$.

Beweis. Die Funktion

$$y(t) = b(t^* - t)^{-\frac{k}{\alpha}}$$

ist, wenn b der Gleichung $b^\alpha = k(k+\alpha) \ldots (k + (k-1)\alpha)\alpha^{-k}$ genügt, eine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(k)} = y^{1+\alpha}.$$

Wählen wir die Konstante t^* $(> t_0)$ genügend groß, so können wir erreichen daß $0 < y^{(i)}(t_0) < z^{(i)}(t_0)$, also nach Hilfssatz 1 $z(t) > y(t)$ für $t > t_0$ ist. Wegen $\lim\limits_{t \to t^*} y(t) = \infty$ existiert, wie behauptet, eine Zahl $t_1 \leqq t^*$ mit der angegebenen Eigenschaft.

Wegen der Ungleichungen (15) kann der Hilfssatz 2 auf $N_1(T)$ angewandt werden (mit $k = 2p$). Damit ist gezeigt, daß $N_1(T)$ nicht für alle $T > t_2$ existiert, daß also $u(x)$ entgegen der Annahme keine ganze Lösung von (1) ist.

Das folgende Beispiel soll darlegen, daß im Falle $n > 2$ die Behauptung des Satzes ohne die Voraussetzung $f(s) \geqq \delta > 0$ falsch ist. Es sei

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(r) = \begin{cases} -1575\, r^2 + 189\, r^4 - 25\, r^6 & \text{für } 0 \leqq r \leqq 1 \\ -1792\, r^{\frac{3}{2}} - 144\, r^{-1} + 525 & \text{für } r > 1 \end{cases}$$

mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Diese Funktion ist zweimal stetig differenzierbar, und es ist

$$\Delta u = u'' + 2u'/r = \begin{cases} -9450 + 3780\, r^2 - 1050\, r^4 & \text{für } 0 \leqq r \leqq 1 \\ -6720\, r^{-\frac{1}{2}} & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, daß Δu zweimal stetig differenzierbar, also u viermal stetig differenzierbar ist und daß

$$\Delta^2 u = \begin{cases} 22680 - 21000 r^2 & \text{für } 0 \leqq r \leqq 1 \\ 1680 r^{-\frac{5}{2}} & \text{für } r > 1 \end{cases}$$

für alle r positiv ist. Wegen $u' < 0$ hat $u(r)$ eine in $-\infty < u \leqq 0$ erklärte eindeutige und stetige Umkehrfunktion $r(u)$ mit $r(0) = 0$, $r(-1411) = 1$. Hiernach ist $u(x)$ eine im ganzen R_3 viermal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta^2 u = f(u) = \begin{cases} 22680 - 21000 r(u)^2 & \text{für } -1411 \leqq u \leqq 0 \\ 1680 r(u)^{-\frac{5}{2}} & \text{für } -\infty < u < -1411, \end{cases}$$

wobei wir für positive u über $f(u)$ noch frei verfügen können.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

3. Der Satz von Nr. 2 bleibt richtig, wenn wir statt (1) die Differentialungleichung

$$\Delta^p u \geqq f(u) \tag{1a}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Differentialgleichung

$$\Delta^p u = f(u) + F(x, u, u_{x_\nu}, \ldots) \tag{1b}$$

mit $F \geqq 0$ betrachten (über f mögen die früheren Voraussetzungen gelten). Beim Beweis ist in der Formelzeile zwischen den Formeln (15) und (16) das Gleichheitszeichen durch $\leqq$ zu ersetzen. Alle übrigen Schlüsse gelten unverändert auch für diesen Fall.

Wir schließen mit einer Bemerkung über die Gleichung

$$\Delta^p u = e^u.$$

Nach unserem Satz gibt es für $n = 2$ keine ganze Lösung, während diese Frage für $n > 2$, $p \geqq 2$ noch nicht geklärt ist (im Gegensatz zu $p = 1$, wo man weiß, daß es keine ganzen Lösungen gibt; s. [3]). Betrachten wir hierzu ein Beispiel! Die Funktion

$$u(x) = u(r) = a + b r^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i r^{2i+4}}{i!\,(2i+2)\,(2i+4)^2\,(2i+6)} \qquad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

ist für $x \in R_4$ analytisch, und aus $\Delta r^{2k} = 2k(2k+2) r^{2k-2}$ folgt sofort

$$\Delta^2 u = e^{-r^2} > 0.$$

Setzen wir $v(t) = u(\sqrt{t})$, so ist

$$v''(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (i+1)\, t^i}{16\,(i+3)!} = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{6} - \frac{t}{12} + \frac{t^2}{40} - \frac{t^3}{180} + - \cdots\right]$$
$$= t^{-3}[2e^{-t} + te^{-t} + t - 2].$$

Also gelten die Abschätzungen

$$\int_0^t v''(s)\,ds \leqq \int_0^1 \frac{ds}{96} + \frac{1}{16}\int_1^\infty (3e^{-s} + s^{-2})\,ds = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{e} + 1\right) < \frac{1}{6}$$

und

$$v(t) \leqq a + bt + \frac{t}{6}.$$

Wählen wir $-a \geqq 0$, $-b \geqq 7/6$, so haben wir $v(t) \leqq -t$ und

$$\Delta^2 u = e^{-r^2} = e^{-t} \geqq e^{v(t)} = e^u;$$

$u(x)$ ist also eine ganze analytische Funktion, die der Ungleichung

$$\Delta^2 u \geqq e^u \qquad (n = 4)$$

genügt. Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, daß tatsächlich ganze Lösungen von $\Delta^p u = e^u$ existieren, sobald $n > 2$, $p \geqq 2$ ist.

Literatur

[1] Gröbner, W., u. N. Hofreiter: Integraltafeln II. Wien-Innsbruck 1950. — [2] Haviland, E. K.: A note un unrestricted solutions of the differential equation $\Delta u = f(u)$. J. London Math. Soc. **26**, 210—214 (1951). — [3] Walter, W.: Über ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$. Jahresber. DMV **57**, 94—102 (1955). — [4] Walter, W.: Mittelwertsätze und ihre Verwendung zur Lösung von Randwertaufgaben. Jahresber. DMV **59**, 93—131 (1957). — [5] Wittich, H.: Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Math. Z. **49**, 579—582 (1943/44).

Mathematisches Institut der Universität Tübingen

(Eingegangen am 16. Oktober 1956)

WALTER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 38—48 (1957)

Verallgemeinerte Laplace-Operatoren und Potentiale

Von
WOLFGANG WALTER

1. Verallgemeinerte Laplace-Operatoren

Es sei G ein Gebiet des n-dimensionalen Euklidischen Raumes E_n $(n \geqq 2)$ und $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ eine in G erklärte (reelle) Funktion. Der Oberflächenmittelwert bzw. räumliche Mittelwert von u bezüglich einer (in G gelegenen) Kugel vom Radius R und Mittelpunkt x ist definiert durch

$$m(R, x, u) = \frac{1}{\omega R^{n-1}} \oint_{|y-x|=R} u(y)\, dy \qquad (\omega = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)) \tag{1}$$

bzw.

$$M(R, x, u) = \frac{1}{\Omega R^n} \int_{|y-x|<R} u(y)\, dy = \frac{n}{R^n} \int_0^R m(r, x, u)\, r^{n-1}\, dr \qquad (n\Omega = \omega) \tag{2}$$

(falls die Integrale existieren). Mit jedem dieser Mittelwerte kann man einen verallgemeinerten Laplace-Operator bilden, und zwar ist

$$\Delta_{(1)} u(x) = 2n \lim_{R \to 0} \frac{m(R, x, u) - u(x)}{R^2} \tag{3}$$

(BLASCHKE [1]) und

$$\Delta_{(2)} u(x) = 2(n+2) \lim_{R \to 0} \frac{M(R, x, u) - u(x)}{R^2} \tag{4}$$

(PRIVALOFF [7][1]). Ist u aus der Klasse C^2[2]), so ist $\Delta_{(1)} u = \Delta_{(2)} u = \Delta u$.

In ähnlicher Weise können auch die Laplace-Operatoren höherer Ordnung verallgemeinert werden. Die (für $u \in C^{2p}$ gültige) Mittelwertentwicklung (s. [5, S. 7] [13, § 1])

$$m(R, x, u) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ni} R^{2i} \Delta^i u(x) + \int_0^R m(r, x, \Delta^p u)\, r^{n-1} H_p(r, R)\, dr \tag{5}$$

mit

$$a_{ni} = \frac{\Gamma(m)}{4^i i!\, \Gamma(m+i)} \qquad (m = n/2) \tag{6}$$

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Die Funktion u ist aus der Klasse C^k oder genauer aus $C^k(G)$ (kurz $u \in C^k$), wenn u und alle partiellen Ableitungen von u bis zur k-ten Ordnung in G existieren und stetig sind; u ist aus $L(G)$, wenn u über G L-integrierbar ist. Insbesondere bedeutet $h(t) \in L(0, 1)$, daß $h(t)$ über das Intervall $(0, 1)$ integrierbar ist.

und

$$H_p(r,R) = 4^{1-p}(p-1)!^{-2}\int_r^R [(R^2-s^2)(s^2-r^2)]^{p-1} s^{3-n-2p}\,ds \tag{7}$$

legt die folgende Definition nahe.

Ist $u \in L(G)$ und gibt es Konstanten $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$, so daß $m(R,x,u)$ für alle hinreichend kleinen R existiert[3]) und

$$m(R,x,u) = \sum_{i=0}^{p} a_{n\,i} R^{2i}\alpha_i + o(R^{2p}) \qquad (\text{für } R \to 0) \tag{8}$$

ist, so wird

$$\Delta_{(1)}^p u(x) = \alpha_p$$

gesetzt (SHAPIRO [12][4]).

Das Entsprechende für den Mittelwert $M(R,x,u)$ lautet: Wenn $u \in L(G)$ ist und wenn es Konstanten $\beta_0, \ldots, \beta_p$ gibt, so daß

$$M(R,x,u) = \sum_{i=0}^{p} \frac{n}{n+2i} a_{n\,i} R^{2i}\beta_i + o(R^{2p}) \tag{9}$$

ist, wird

$$\Delta_{(2)}^p u(x) = \beta_p$$

gesetzt.

Ist u aus der Klasse C^{2p}, so stimmen die Operatoren $\Delta_{(1)}^p$, $\Delta_{(2)}^p$ und Δ^p überein. Ferner ist leicht zu sehen, daß, wenn (8) gilt, auch (9) mit $\alpha_i = \beta_i$ gültig ist. Die Definition (9) ist also allgemeiner.

Ist $p=1$ und x ein Stetigkeitspunkt von u, so ist $\alpha_0 = \beta_0 = u(x)$, und (8) bzw. (9) wird mit (3) bzw. (4) identisch. Ist dagegen u nur L-integrierbar, so kann in einem Punkte sehr wohl (9) für $p=1$ bestehen, ohne daß $\Delta_{(2)} u$ im Sinne von (4) existiert [dasselbe gilt für (8) und (3)]. Da aber fast überall $\beta_0 = u(x)$ ist (SAKS [9, S. 118]), können wir sagen: Existiert $\Delta_{(2)}^1 u(x)$ [gemäß (9)] in einer Punktmenge $A \subset G$, so existiert $\Delta_{(2)} u(x)$ [gemäß (4)] für $x \in A - N$, $|N| = 0$[5]) [entsprechendes gilt für (8) und (3)].

Eine andere Möglichkeit zur Verallgemeinerung von Laplace-Operatoren bieten die allgemeinen Mittelwerte bezüglich einer Gewichtsfunktion $g(t)$ (s. [13, § 2]). Ist $g(t)$ für $0 \leqq t \leqq 1$ erklärt, $t^{n-1} g(t) \in L(0,1)$ und $n\int_0^1 g(t)\, t^{n-1}\,dt = 1$, so ist der Mittelwert $M(R,x,u,g)$ definiert durch

$$\left\{\begin{aligned} M(R,x,u,g) &= \frac{1}{\Omega R^n}\int_{|y-x|<R} u(y)\, g(|y-x|/R)\,dy \\ &= \frac{n}{R^n}\int_0^R m(r,x,u)\, r^{n-1} g(r/R)\,dr. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

[3]) Man könnte hier mit der Voraussetzung, daß u lediglich L-integrierbar ist, auskommen. Dann existiert der Oberflächenmittelwert für fast alle R eines Intervalles $(0,\delta)$ (s. [13], § 1), und man verlangt (8) nur für diejenigen R, für welche $m(R,x,u)$ existiert.

[4]) Bei SHAPIRO ist $n=2$.

[5]) $|N|$ bezeichnet das L-Maß von N.

Setzt man in das letzte Integral die Entwicklung (5) ein, so erhält man, falls $u \in C^{2p}$ ist,

$$(11)\quad \begin{cases} M(R,x,u,g) = \sum_{i=0}^{p-1} b_{ni} R^{2i} \Delta^i u(x) + \\ \qquad + \frac{n}{R^n} \int_0^R m(r,x,\Delta^p u)\, r^{n-1} \int_r^R H_p(r,s)\, s^{n-1} g(s/R)\, ds\, dr \end{cases}$$

mit

$$(12)\qquad b_{ni} = a_{ni}\, n \int_0^1 g(t)\, t^{n+2i-1}\, dt.$$

Nun sei p fest und g so gewählt, daß

$$(13)\qquad n \int_0^1 g(t)\, t^{n+2i-1}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{für } 0 < i < p \\ A \neq 0 & \text{für } i = p \end{cases}$$

ist. Dann gilt für $u \in C^{2p}$

$$(14)\qquad \lim_{R\to 0} \frac{M(R,x,u,g) - u(x)}{A\, a_{np} R^{2p}} = \Delta^p u(x).$$

Wir beweisen zugleich noch etwas mehr, indem wir zeigen: Ist $u \in L(G)$ und $\Delta^p_{(1)} u(x) = \alpha_p$ für einen Punkt $x \in G$, so hat der Limes (14) mit α_0 an Stelle von $u(x)$ den Wert α_p.

Es ist nämlich nach (8), (10) und (13)

$$\begin{aligned} M(R,x,u,g) &= n R^{-n} \int_0^R \Big\{ \sum_{i=0}^{p} a_{ni} r^{2i} \alpha_i + o(r^{2p}) \Big\} r^{n-1} g(r/R)\, dr \\ &= \alpha_0 + a_{np} A R^{2p} \alpha_p + n R^{-n} \int_0^R o(r^{2p})\, r^{n-1} g(r/R)\, dr \\ &= \alpha_0 + a_{np} A R^{2p} \alpha_p + R^{-n} o(1) \int_0^R r^{n+2p-1} |g(r/R)|\, dr \\ &= \alpha_0 + a_{np} A R^{2p} \alpha_p + R^{2p} o(1) \int_0^1 |g(t)|\, t^{n+2p-1}\, dt \\ &= \alpha_0 + a_{np} A R^{2p} \alpha_p + o(R^{2p}). \end{aligned}$$

Führt man nun den Operator Δ^p_* gemäß

$$(15)\qquad \Delta^p_* u(x) = \lim_{R\to 0} \frac{M(R,x,u,g) - u(x)}{A\, a_{np} R^{2p}}$$

ein [über g mögen die früheren Voraussetzungen, also $t^{n-1} g(t) \in L(0,1)$ und (13) gelten], so läßt sich zusammenfassend sagen:

Existiert $\Delta^p_{(1)} u(x)$ [*und ist* $\alpha_0 = u(x)$], *so existiert auch* $\Delta^p_* u(x)$, *und es ist* $\Delta^p_{(1)} u(x) = \Delta^p_* u(x)$; *ist* $u \in C^{2p}$, *so ist* $\Delta^p_* u(x) = \Delta^p u(x)$.

Ohne Beweis sei erwähnt: *Läßt sich g in der Gestalt $g = h_1 - h_2$ darstellen, wobei $h_i(t)$ in jedem Intervall $0 < \delta \leqq t \leqq 1$ monoton wachsend und $t^{n-1} h_i(t) \in L(0, 1)$ ist $(i = 1, 2)$, so existiert $\Delta^p_* u(x)$, sobald $\Delta^p_{(2)} u(x)$ existiert (und $\beta_0 = u(x)$ ist), und beide Werte stimmen überein.*

Als Beispiele für $g(t)$ seien

$$g_1(t) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \log^i t \quad \text{und} \quad g_2(t) = \sum_{i=0}^{p-1} d_i (1 - t^2)^i$$

genannt; die Konstanten c_i, d_i lassen sich so bestimmen, daß (13) gilt. Der zu g_1 gehörige Operator wurde im wesentlichen von NICOLESCO [*5*, S. 11][6]), der zu g_2 gehörige von GHERMANESCU [*2*, S. 299] angegeben.

Oft wird es zweckmäßig sein, eine engere Klasse von Gewichtsfunktionen zu betrachten, etwa nur beschränkte Funktionen oder analytische Funktionen oder Polynome zuzulassen. Dagegen erscheint es uns nicht zweckmäßig, sich ein für allemal auf eine bestimmte Gewichtsfunktion, etwa ein Polynom, festzulegen[7]).

2. Grundlösungen und Potentiale

Es sei

$$\gamma(r) = \begin{cases} -\log r & \text{für } n = 2 \\ \dfrac{r^{2-n}}{n-2} & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

die Grundlösung für die Gleichung $\Delta u = 0$ und

$$F(x) = {}^{E_n}\!\int f(y)\, \gamma(y - x)\, dy \tag{17}$$

das Potential einer Massenbelegung von der Dichte $f(x)$ [für $\gamma(|x|)$ schreiben wir einfach $\gamma(x)$]. Unter geeigneten Voraussetzungen über f, z.B. wenn f Hölder-stetig ist und außerhalb eines beschränkten Gebietes verschwindet, gilt dann die Poisson-Gleichung

$$\Delta F(x) = -\omega f(x). \tag{18}$$

Dieser Zusammenhang zwischen Dichtefunktion und Potential gestattet eine weitgehende Verallgemeinerung, wenn man statt Δ einen der Operatoren $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ benützt.

Unter einer *positiven Massenverteilung* verstehen wir eine Mengenfunktion μ, die für alle Borel-Mengen B erklärt, nichtnegativ und volladditiv ist, für die also $\mu(B) \geqq 0$ und, wenn $B_1, B_2, \ldots$ eine endliche oder unendliche Folge von paarweise punktfremden Borel-Mengen ist,

$$\mu(B_1 + B_2 + \cdots) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \cdots$$

---

[6]) Es ist nicht genau der Operator von NICOLESCO, sondern der Operator, den man erhält, wenn man die Nicolesco-Mittelwerte $\mu_1, \ldots, \mu_p$ statt $\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}$ benützt (vgl. [*5*, S. 8ff.] und die Bemerkung in [*13*, § 3, Beispiel 1]).

[7]) Ist z.B. $g(t)$ ein Polynom in t^2, so ist $g(|x|/R)$ ein Polynom in x; ist g eine Funktion $P(t^2) \exp[1/(t^2 - 1)]$ (P Polynom), so hat man den Vorteil, daß der Mittelwert zu C^∞ gehört („régularisée" im Sinne von L. SCHWARTZ [*11*, S. 22]).

ist (RADÓ [8, S. 25]). Außerdem verlangen wir, daß die Gesamtmasse $\mu(E_n)$ endlich ist und daß es eine beschränkte Menge G mit $\mu(E_n - G) = 0$ gibt[8]). Die Funktion μ definiert ein Lebesgue-Stieltjes-Integral (SAKS [9, Chap. III], und wir nennen das Integral

$$F(x) = {}^{E_n}\!\int \gamma(y-x)\, d\mu(y) \tag{19}$$

das Potential der Massenverteilung μ (RADÓ [8, S. 27]).

Der folgende bekannte Satz kann als Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung (18) angesehen werden.

Satz. *Ist μ eine positive Massenverteilung und $F(x)$ ihr Potential, so gilt in jedem Punkt x, in dem die Dichte $D\mu(x)$ existiert, d.h. für den*

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{\Omega R^n} \int\limits_{y-x<R} d\mu(y) = D\mu(x) < \infty \tag{20}$$

ist, die Gleichung

$$\Delta_{(1)} F(x) = \Delta_{(2)} F(x) = -\omega\, D\mu(x). \tag{21}$$

Ist insbesondere μ totalstetig, also $\mu(B) = {}^{B}\!\int f(x)\, dx$ mit $f(x) = D\mu(x) \geqq 0$, so stimmen die Integrale (17) und (19) überein, und es ist fast überall

$$\Delta_{(1)} F(x) = \Delta_{(2)} F(x) = -\omega f(x)$$

(SAKS [10], POTTS [6]; vgl. auch LORENTZ [4]).

3. Es ist das *Ziel der vorliegenden Arbeit*, den entsprechenden Satz für den Operator Δ_*^p zu beweisen. Zunächst einige Erklärungen. Die Funktion

$$\gamma_p(r) = \begin{cases} A_{np} r^{2p-n},\ A_{np} = \dfrac{(-1)^{p-1}\Gamma(m-p)}{2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(m)} & \text{für } n \text{ ungerade und } n > 2p \\ B_{np} r^{2p-n}\log r,\ B_{np} = \dfrac{(-1)^m}{4^{p-1}\Gamma(m)\Gamma(p)\Gamma(p-m+1)} & \text{für } n = 2, 4, \ldots, 2p \end{cases} \tag{22}$$

(hier und im folgenden ist $m = n/2$ gesetzt) ist eine Grundlösung für die Differentialgleichung $\Delta^p u = 0$ (bei JOHN [3, S. 43] steht noch ein Faktor $-\omega$ im Nenner; wir haben die aus der Potentialtheorie geläufige Normierung, bei der dieser Faktor dann in der Poisson-Gleichung auftritt, beibehalten). Wieder wird $\gamma_p(x)$ für $\gamma_p(|x|)$ geschrieben.

Das „p-Potential" ($p \geqq 1$) einer positiven Massenverteilung μ ist definiert durch

$$F(x) = {}^{E_n}\!\int \gamma_p(y-x)\, d\mu(y); \tag{23}$$

ist μ totalstetig und $D\mu(x) = f(x)$, so können wir statt (23) auch

$$F(x) = {}^{E_n}\!\int f(y)\, \gamma_p(y-x)\, dy \tag{24}$$

[8]) Diese letzte Voraussetzung ist entbehrlich, wenn $n > 2$, und später bei beliebigem p, wenn $n > 2p$ ist, da dann $\gamma_p(r)$ im Unendlichen verschwindet. Ist jedoch $n \leq 2p$, so wird $\gamma_p(r)$ groß für große r, und eine solche oder ähnliche Voraussetzung wird notwendig, um die Endlichkeit des Potentials zu sichern.

schreiben. Es besteht dann, wenn f etwa Hölder-stetig ist, die iterierte Poisson-Gleichung

$$\Delta^p F(x) = -\omega f(x). \tag{25}$$

Die zu beweisende Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes lautet:

Satz. *Ist μ eine positive Massenverteilung [mit $\mu(E_n) < \infty$ und $\mu(E_n - G) = 0$ für ein geeignetes beschränktes Gebiet G[8])], so existiert ihr Potential fast überall. Für fast alle x, genauer für jeden Punkt x, in dem die Dichte $D\mu(x)$ existiert [s. (20)], ist*

$$\Delta^p_* F(x) = -\omega D\mu(x). \tag{26}$$

Dabei ist jeder Operator Δ^p_* zugelassen, für den $g(t)\, t^{n-1} \in L(0, 1)$ ist und (13) gilt.

Nach den Bemerkungen von Nr. 1 gilt dann die Gl. (26) auch für den Operator $\Delta^p_{(1)}$ von Shapiro, für den allgemeineren Operator $\Delta^p_{(2)}$ und für die Operatoren von Nicolesco und Ghermanescu.

Beweis. Es sei N die Menge der Punkte x, in denen die Dichte existiert. Ist β eine positive Zahl $< n$ und $x \in N$, so ist nach (20) für ein festes $R > 0$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{y-x<R} |y-x|^{\beta-n}\, d\mu(y) \\
&\quad = R^{\beta-n} \int\limits_{y-x<R} d\mu(y) + \int\limits_{y-x<R} \int\limits_{y-x|}^{R} (n-\beta)\, s^{\beta-n-1}\, ds\, d\mu(y) \\
&\quad = R^{\beta-n} \int\limits_{|y-x|<R} d\mu(y) + (n-\beta) \int\limits_0^R s^{\beta-n-1} \int\limits_{|y-x|<s} d\mu(y)\, ds \\
&\quad = R^{\beta-n} \int\limits_{|y-x|<R} d\mu(y) + O(1) \int\limits_0^R s^{\beta-1}\, ds < \infty.
\end{aligned} \tag{27}$$

Hieraus folgt nach (22), daß das p-Potential für $x \in N$ existiert und endlich ist.

Nun sei $x_0 \in N$ und $h(x)$ eine nichtnegative Funktion aus C^∞, die in einer Umgebung des Punktes x_0 konstant gleich $D\mu(x_0)$ ist und außerhalb eines beschränkten Gebietes verschwindet. Das zu h gehörige p-Potential

$$H(x) = {}^{E_n}\!\int h(y)\, \gamma_p(y-x)\, dy$$

ist in einer Umgebung von x_0 $2p$-mal stetig differenzierbar, und es ist

$$\Delta^p H(x) = \Delta^p_* H(x) = -\omega h(x) = -\omega D\mu(x_0) \qquad \text{für } x = x_0.$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\Delta^p_*(F - H)$ im Punkte x_0 existiert und $= 0$ ist. Nehmen wir zur Vereinfachung der Schreibweise $x_0 = 0$ an, so haben wir

$$M(R, 0, F-H, g) - F(0) + H(0) = o(R^{2p}) \qquad (\text{für } R \to 0) \tag{28}$$

unter der Voraussetzung

$$\int\limits_{|x|<R} d\mu(x) = \Omega R^n D\mu(0) + o(R^n) \tag{29}$$

zu beweisen.

Dazu benötigen wir die Formel

$$(30)\quad G(y,r)=\oint_{|x|=r}\gamma_p(y-x)\,dx=\begin{cases}\omega\sum_{i=0}^{p-1}a_{ni}r^{n+2i-1}\Delta^i\gamma_p(y) & \text{für } |y|>r\\ \omega\sum_{i=0}^{p-1}a_{ni}r^{n-1}|y|^{2i}\Delta^i\gamma_p(r) & \text{für } |y|<r.\end{cases}$$

Für festes r ist $G(y,r)$ nur von $|y|$ abhängig und für $|y|\neq r$ eine p-harmonische Funktion (d.h. eine Lösung der Gleichung $\Delta^p u=0$). Die erste Zeile von (30) ist nichts anderes als die Mittelwertentwicklung (5) für $\gamma_p(y-x)$ (als Funktion von x bei festem y; man beachte, daß γ_p in der Kugel $|x|\leqq r$ p-harmonisch ist). Die zweite Zeile ergibt sich aus der Tatsache, daß $G(y,r)$ für $|y|<r$ als eine nur von $|y|$ abhängende p-harmonische Funktion ein Polynom $a+b|y|^2+\cdots+c|y|^{2p-2}$ ist, das dann notwendig die angegebene Gestalt hat (man wende auf beide Seiten der Gleichung den Operator Δ^i an und setze dann $y=0$, wobei zu beachten ist, daß $\Delta^i a_{ni}|y|^{2i}=1$ ist).

Aus den beiden Formeln

$$(31)\quad \Delta r^k=k(n+k-2)\,r^{k-2},\quad \Delta r^k\log r=[k(k+n-2)\log r+n+2k-2]\,r^{k-2}$$

folgt nach (22) leicht, daß

$$(32)\qquad \Delta^i\gamma_p(r)=C\,r^{2p-n-2i}+C_1 r^{2p-n-2i}\log r$$

mit geeigneten Konstanten C, C_1 ist und daß hierbei die Konstante C_1 nur dann von Null verschieden ist, wenn $2p-n-2i\geqq 0$ und gerade ist.

Die Funktion $\gamma_p(x-y)$ genügt als Funktion von x bei festem y mit $|y|>R$ in der Kugel $|x|\leqq R$ der Gleichung $\Delta^p\gamma_p(y-x)=0$. Hiernach und nach (11) bis (13) ist

$$(33)\qquad \frac{1}{\Omega R^n}\int_{|x|<R} g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)\,dx=\gamma_p(y)\qquad \text{für } |y|>R.$$

Ist jedoch $|y|<R$, so ergibt sich mit (30)

$$(34)\quad \begin{cases}\int_{|x|<R} g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)\,dx=\int_0^R g(r/R)\,G(y,r)\,dr\\ =\omega\sum_{i=0}^{p-1}a_{ni}\left\{\Delta^i\gamma_p(y)\int_0^{|y|}g(r/R)\,r^{n+2i-1}\,dr+|y|^{2i}\int_{|y|}^R g(r/R)\,r^{n-1}\,\Delta^i\gamma_p(r)\,dr\right\}.\end{cases}$$

Wenn man in der letzten Zeile alle Funktionen durch ihre absoluten Beträge ersetzt und beachtet, daß nach (32) für kleine r, etwa für $r<1/2$, eine Abschätzung

$$|\Delta^i\gamma_p(r)|<C_2 r^{-2i}|\gamma_p(r)|\qquad \text{mit geeignetem } C_2$$

gilt, so erhält man die Abschätzung

$$(35)\quad \begin{cases}\int_{|x|<R}|g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)|\,dy\leqq C_3|\gamma_p(y)|\int_0^{|y|}|g(r/R)|\,r^{n-1}\,dr+\\ \qquad +C_4\int_{|y|}^R|g(r/R)\,r^{n-1}\gamma_p(r)|\,dr,\end{cases}$$

welche zeigt, daß das Integral in (33) sicher für $|y|>0$ existiert. Ist $n<2p$, so ist $\gamma_p(r)$ für $r<1/2$ beschränkt, und die rechte Seite von (35) ist (bei festem R) $<C_5$. Für $n\geqq 2p$ ist $|\gamma_p(r)|$ monoton fallend, das letzte Integral wird daher vergrößert, wenn wir in ihm den Faktor $|\gamma_p(r)|$ durch $|\gamma_p(y)|$ ersetzen. In allen Fällen ist also

$$\int\limits_{|x|<R} |g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)|\,dy \leqq C_5 + C_6|\gamma_p(y)| \quad \text{für festes (kleines) } R. \tag{36}$$

Diese Abschätzung zeigt in Verbindung mit (27), daß auch das Integral

$$\begin{cases} {}^{E_n}\int \int\limits_{|x|<R} |g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)|\,dx\,d\mu(y) \\ \qquad = \int\limits_{|x|<R} |g(|x|/R)|\,{}^{E_n}\int |\gamma_p(y-x)|\,d\mu(y)\,dx < \infty \end{cases} \tag{37}$$

ist, d.h. daß $M(R,0,F,g)$ existiert. Nach Gl. (33) ist

$$F(0)-H(0) = {}^{E_n}\int \gamma_p(y)\,(d\mu(y)-h(y)\,dy)$$

oder, wenn wir die Abkürzung $d\bar{\mu}(y)=d\mu(y)-h(y)\,dy$ einführen,

$$F(0)-H(0) = \int\limits_{|y|<R} \gamma_p(y)\,d\bar{\mu}(y) + \int\limits_{|y|>R} \frac{1}{\Omega R^n} \int\limits_{|x|<R} g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)\,dx\,d\bar{\mu}(y),$$

also wegen (37)

$$\begin{aligned} M(R,0,F-H,g) &- F(0)+H(0) \\ &= \frac{1}{\Omega R^n} \int\limits_{|x|<R} g(|x|/R)\,{}^{E_n}\int \gamma_p(y-x)\,d\bar{\mu}(y)\,dx - F(0)+H(0) \\ &= \frac{1}{\Omega R^n}\,{}^{E_n}\int \int\limits_{r<R} g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)\,dx\,d\bar{\mu}(y) - F(0)+H(0) \\ &= \int\limits_{|y|<R} \left\{ \frac{1}{\Omega R^n} \int\limits_{|x|<R} g(|x|/R)\,\gamma_p(y-x)\,dx - \gamma_p(y) \right\} d\bar{\mu}(y). \end{aligned} \tag{38}$$

Für die geschweifte Klammer ergibt sich nach (34), wenn wir zur Abkürzung $|y|=\varrho$ setzen,

$$n R^{-n} \sum_{i=0}^{p-1} a_{ni} \left\{ \Delta^i \gamma_p(\varrho) \int\limits_0^{\varrho} g(r/R)\,r^{n+2i-1}\,dr + \varrho^{2i} \int\limits_{\varrho}^{R} g(r/R)\,r^{n-1}\,\Delta^i\gamma_p(r)\,dr \right\} - \gamma_p(\varrho)$$

oder, da nach (13)

$$n R^{-n} \int\limits_0^R g(r/R)\,r^{n+2i-1}\,dr = 1 \quad \text{für } i=0, \; =0 \quad \text{für } 0<i<p$$

ist,

$$n R^{-n} \sum_{i=0}^{p-1} a_{ni} \int\limits_{\varrho}^{R} g(r/R)\,r^{n-1}\{\varrho^{2i}\Delta^i\gamma_p(r) - r^{2i}\Delta^i\gamma_p(\varrho)\}\,dr. \tag{39}$$

Betrachten wir zuerst für ein festes i den nichtlogarithmischen Teil $C r^{2p-n-2i}$ von $\Delta^i \gamma_p(r)$. Der ihm entsprechende Teil des Integrals (38) lautet, abgesehen von einem konstanten Faktor,

$$J = R^{-n} \int_{|y|<R} \int_{\varrho}^{R} g(r/R)\, r^{n-1} \{\varrho^{2i} r^{2p-n-2i} - r^{2i} \varrho^{2p-n-2i}\}\, dr\, d\bar{\mu}(y) \qquad (\varrho = |y|)$$

$$= R^{-n} \int_{|y|<R} \int_{\varrho}^{R} g(r/R)\, r^{n+2i-1} \varrho^{2i} (2p-n-4i) \int_{\varrho}^{r} s^{2p-n-4i-1}\, ds\, dr\, d\bar{\mu}(y)$$

$$(40) \qquad = (2p-n-4i)\, R^{-n} \int_0^R g(r/R)\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-n-4i-1} \int_{|y|<s} |y|^{2i}\, d\bar{\mu}(y)\, ds\, dr.$$

Die hierbei angewandte Vertauschung der Reihenfolge der Integration ist erlaubt, da

$$\int_0^R |g(r/R)|\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-n-4i-1} \int_{|y|<s} |y|^{2i} \big(d\mu(y) + h(y)\, dy\big)\, ds\, dr < \infty$$

ist [das über y genommene innere Integral ist nach (29) $\leq C s^{n+2i}$]. Setzen wir in (40)

$$|y|^{2i} = s^{2i} - 2i \int_{|y|}^{s} t^{2i-1}\, dt$$

ein, so spaltet sich J in zwei Integrale $J = J_1 - J_2$ auf, von denen jedes einfach abgeschätzt werden kann. Nach (29) ist

$$\int_{|y|<R} d\bar{\mu}(y) = o(R^n),$$

also

$$J_1 = (2p-n-4i)\, R^{-n} \int_0^R g(r/R)\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-n-2i-1} \int_{|y|<s} d\bar{\mu}(y)\, ds\, dr$$

$$= R^{-n} \int_0^R g(r/R)\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-n-2i-1}\, o(s^n)\, ds\, dr$$

$$= o(1)\, R^{-n} \int_0^R |g(r/R)|\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-2i-1}\, ds\, dr$$

$$= o(1)\, R^{2p} \int_0^1 |g(t)|\, t^{n+2p-1}\, dt = o(R^{2p})$$

und

$$J_2 = 2i(2p-n-4i)\, R^{-n} \int_0^R g(r/R)\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-n-4i-1} \int_{|y|<s} \int_{|y|}^{s} t^{2i-1}\, dt\, d\bar{\mu}(y)\, ds\, dr$$

$$= 2i(2p-n-4i)\, R^{-n} \int_0^R g(r/R)\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-n-4i-1} \int_0^s t^{2i-1} \int_{|y|<t} d\bar{\mu}(y)\, dt\, ds\, dr$$

$$= o(1)\, R^{-n} \int_0^R |g(r/R)|\, r^{n+2i-1} \int_0^r s^{2p-n-4i-1} \int_0^s t^{n+2i-1}\, dt\, ds\, dr = o(R^{2p}).$$

Damit ist das Integral (38), was die nichtlogarithmischen Glieder anbetrifft, in der durch (28) geforderten Weise abgeschätzt. Insbesondere ist der Satz bewiesen in all den Fällen, in denen kein logarithmisches Glied auftritt, das ist für $n \neq 2, 4, \ldots, 2p$.

Logarithmische Glieder treten nur auf, wenn $n = 2p - 2k$, $k \geqq 0$ und ganz ist. Eine genauere Rechnung ergibt für diese Fälle statt (32) die Gleichung

$$\Delta^i \gamma_p(r) = B_{n,p-i} r^{2p-n-2i} \log r + C r^{2p-n-2i} \qquad (i = 0, \ldots, k); \tag{41}$$

die Konstante $B_{n\,p-i}$ ist in (22) definiert, der Beweis ergibt sich leicht aus (22) und (31). Der noch abzuschätzende Rest des Integrals (38) lautet also wegen (39)

$$J' = n R^{-n} \int\limits_{|y|<R} \sum_{i=0}^{k} a_{n\,i} B_{n,p-i} \int\limits_{\varrho}^{R} g(r/R)\, r^{n-1} \{\varrho^{2i} r^{2k-2i} \log r - r^{2i} \varrho^{2k-2i} \log \varrho\}\, dr\, d\bar{\mu}(y)$$

[für $i > k$ ist $2p - 2i - n < 0$, und wir haben oben bei der Gl. (32) schon bemerkt, daß dann keine logarithmischen Glieder mehr vorhanden sind]. Diese Summe vereinfacht sich, da nach (6) und (22)

$$a_{n\,i} B_{n,p-i} = a_{n,k-i} B_{n,p-k+i} \qquad \text{für } n = 2p - 2k,\ 0 \leqq i \leqq k,\ k \text{ ganz},$$

ist, zu

$$J' = n R^{-n} \int\limits_{|y|<R} \sum_{i=0}^{k} a_{n\,i} B_{n,p-i} \int\limits_{\varrho}^{R} g(r/R)\, r^{n-2k-2i-1} \varrho^{2i} \log \frac{r}{\varrho}\, dr\, d\bar{\mu}(y) = J_0' + \cdots + J_k'.$$

Eine ähnliche Abschätzung wie oben bei den nichtlogarithmischen Gliedern ergibt

$$\begin{aligned} J_i' &= C R^{-n} \int_0^R r^{n+2k-2i-1} g(r/R) \int\limits_{|y|<r} |y|^{2i} \log \frac{r}{|y|}\, d\bar{\mu}(y)\, dr \\ &= C R^{-n} \int_0^R r^{n+2k-2i-1} g(r/R) \int_0^r s^{-1} \int\limits_{|y|<s} |y|^{2i}\, d\bar{\mu}(y)\, ds\, dr = J_i'' - J_i''' \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} J_i'' &= C R^{-n} \int_0^R r^{n+2k-2i-1} g(r/R) \int_0^r s^{2i-1} \int\limits_{|y|<s} d\bar{\mu}(y)\, ds\, dr \\ &= o(1) R^{-n} \int_0^R r^{n+2k-2i-1} |g(r/R)| \int_0^r s^{2i+n-1}\, ds\, dr = o(R^{2p}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} J_i''' &= C' R^{-n} \int_0^R r^{n+2k-2i-1} g(r/R) \int_0^r s^{-1} \int\limits_{|y|<s} \int_{|y|}^{s} t^{2i-1}\, dt\, d\bar{\mu}(y)\, ds\, dr \\ &= C' R^{-n} \int_0^R r^{n+2k-2i-1} g(r/R) \int_0^r s^{-1} \int_0^s t^{2i-1} \int\limits_{|y|<t} d\bar{\mu}(y)\, dt\, ds\, dr \\ &= o(1) R^{-n} \int_0^R r^{n+2k-2i-1} |g(r/R)| \int_0^r s^{-1} \int_0^s t^{n+2i-1}\, dt\, ds\, dr = o(R^{2p}). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz auch in den Fällen $n = 2, 4, \ldots, 2p$ vollständig bewiesen.

Literatur

[1] Blaschke, W.: Ein Mittelwertsatz und eine kennzeichnende Eigenschaft des logarithmischen Potentials. Leipz. Ber. **68**, 3—7 (1916). F **46**, 742. — [2] Ghermanescu, M.: Sur les valeurs moyennes des fonctions. Math. Ann. **119**, 288—320 (1944). — [3] John, F.: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. New York 1955. — [4] Lorentz, G. G.: Über die Dichte des Potentials einer räumlichen Belegung. Math. Z. **51**, 262—264 (1949). — [5] Nicolesco, M.: Les fonctions polyharmoniques. Paris 1936. — [6] Potts, D. H.: A note on the operators of Blaschke and Privaloff. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 782—787 (1948). — [7] Privaloff, I.: Sur les fonctions harmoniques. Rec. Math. Moscou **32**, 464—471 (1925). F **51**, 363. — [8] Radó, T.: Subharmonic functions. Berlin 1937 (Ergebnisse der Mathematik, Bd. 5, H. 1). — [9] Saks, S.: Theory of the integral. Warschau 1937. — [10] Saks, S.: On the operators of Blaschke and Privaloff for subharmonic functions. Rec. Math. N. S. **9**, 451—456 (1941). R **2**, 366. — [11] Schwartz, L.: Theorie des distributions I. Paris 1950. — [12] Shapiro, V. L.: Circular summability C of double trigonometric series. Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 223—233 (1954). — [13] Walter, W.: Mittelwertsätze und ihre Verwendung zur Lösung von Randwertaufgaben. Jahresber. DMV **59**, 93—131 (1957).

(F = Fortschritte der Mathematik; R = Mathematical Reviews.)

Mathematisches Institut der Universität Tübingen

(Eingegangen am 25. Oktober 1956)

Bagemihl, F.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 49/50 (1957)

On the set of values assumed by holomorphic functions near essential singularities

By
F. Bagemihl

Let the point ζ in the complex plane be an isolated essential singularity of a holomorphic function $f(z)$. Then, according to Weierstrass, in every neighborhood of ζ, $f(z)$ comes arbitrarily close to every complex value. It is not difficult to derive[1]) from this the fact that there exists an everywhere dense set of complex numbers, each of which is assumed by $f(z)$ in every neighborhood of ζ. Picard's theorem, of course, overshadows this result, but, as we shall show, the idea behind its proof can be used to obtain information in a similar situation where the analogue of Picard's theorem does not hold.

Besicovitch has proved[2]) that if the set E of essential singularities of a holomorphic function $f(z)$ is of linear measure zero, then, in every neighborhood of each point of E, $f(z)$ comes arbitrarily close to every complex number. Seidel has shown[3]), however, that there exists a holomorphic function whose essential singularities form a set of linear measure zero, and that omits a nonenumerable set of values of logarithmic measure zero[4]). We shall prove the following

Theorem. *Let the set E of essential singularities of a holomorphic function $f(z)$ be of linear measure zero. Then there exists a residual set R of complex numbers, each of which is assumed by $f(z)$ in every neighborhood of each point of E*[5]).

Proof. We shall first show that to every $\zeta \in E$ there corresponds a residual set R_ζ of complex numbers, each of which is assumed by $f(z)$ in every neighborhood of ζ.

---

[1]) *Cf.* Osgood, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, 5. Aufl., p. 329. Leipzig u. Berlin 1928. — Bieberbach, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, 4. Aufl., p. 150. Leipzig 1934.

[2]) Besicovitch, A. S.: On sufficient conditions for a function to be analytic. Proc. London Math. Soc. (2), 1—9 (1931).

[3]) Seidel, W.: On the distribution of values of bounded analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 201—226 (1934), p. 218.

[4]) Prof. Seidel informs me that by making use of a result due to Frostman, O.: Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem. **3**, 1—118 (1935), p. 113, "logarithmic measure zero" can be replaced by "logarithmic capacity zero and infinite logarithmic measure".

[5]) Hence, the set of values that $f(z)$ omits is of first category.

By a rational disk we mean an open disk whose radius is a rational number and whose center is a complex number with its real and imaginary parts both rational. The set of all rational disks is enumerable; let its elements be denoted by $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$.

Suppose that $\zeta \in E$. We shall obtain the desired residual set R_ζ as an everywhere-dense G_δ, namely, the intersection of sets $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$, each of which is open and everywhere dense. The set B_m is constructed as follows. For every natural number n, there exists, according to BESICOVITCH's theorem, a point $d_n^{(m)} \in D_n$, and a point $z_n^{(m)}$ satisfying $0 < |z_n^{(m)} - \zeta| < 1/2m$, such that $f(z_n^{(m)}) = d_n^{(m)}$, and hence there exists an open disk $K_n^m \subset D_n$, with $d_n^{(m)} \in K_n^m$, such that every value in K_n^m is assumed by $f(z)$ in the disk C_n^m defined by $|z - z_n^{(m)}| < 1/2m$. Set $B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^m$. It is obvious that B_m is open, and it is also everywhere dense, because if N is any neighborhood, there exists a k such that $D_k \subset N$, and since $K_k^m \subset D_k$, $B_m \cap N \neq 0$.

Let $R_\zeta = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, and suppose that $w_0 \in R_\zeta$. Then $w_0 \in B_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, and hence there exist natural numbers $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ such that $w_0 \in K_{n_m}^m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Consequently, the value w_0 is assumed by $f(z)$ in each of the disks $C_{n_m}^m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. If $r > 0$ is arbitrary, and μ is a natural number such that $1/\mu < r$, then $C_{n_\mu}^\mu$ is a subset of the neighborhood $|z - \zeta| < r$. This means that each element of R_ζ is assumed by $f(z)$ in every neighborhood of ζ.

Now let T be a countable subset of E that is everywhere dense in E. The set $R = \bigcap_{\zeta \in T} R_\zeta$ is evidently a residual set that satisfies the conclusion of the theorem.

Dept. of Math., University of Notre Dame, Notre Dame, Ind. (U.S.A.)

(Eingegangen am 11. September 1956)

Agnew, R. P.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 51—62 (1957)

Borel transforms of Tauberian series

By

R. P. Agnew

1. Introduction. Let

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \qquad B(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_k \tag{1.1}$$

denote the sequence of partial sums and the Borel exponential transform of a series $\sum u_n$ of complex terms satisfying the Tauberian condition

$$\limsup_{n \to \infty} |n^{\frac{1}{2}} u_n| = L < \infty. \tag{1.2}$$

It is pur purpose to continue studies of Karamata [1938] and Rajagopal [1953] on the behavior, for large values of n and t, of $|B(t) - S_n|$.

Let $n = n(\alpha)$ and $t = t(\alpha)$ be positive functions of a parameter α, defined for $\alpha > 0$ and such that $n(\alpha) \to \infty$ and $t(\alpha) \to \infty$ as $\alpha \to \infty$, the function $n(\alpha)$ being an integer for each $\alpha > 0$. There is then a least constant A, depending upon the functions $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$ and which is either finite or $+\infty$, such that

$$\limsup_{\alpha \to \infty} |B(t) - S_n| \leq A L \tag{1.3}$$

whenever $\sum u_n$ is a series for which (1.2) holds. Our main problem is to determine this least constant A in terms of the functions $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$, and to characterize those pairs of functions $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$ for which A assumes its minimum value. As we shall show in section 3, if

$$\limsup_{\alpha \to \infty} |n - t|/t^{\frac{1}{2}} = M < \infty \tag{1.31}$$

then A is finite and

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[e^{-M^2/2} + M \int_0^M e^{-x^2/2}\, dx \right] \tag{1.32}$$

and if the left member of (1.31) is $+\infty$, then $A = +\infty$. The formula (1.32) is equivalent to

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} |x - M|\, dx. \tag{1.33}$$

The results which we obtain imply the following two theorems.

Theorem 1.4. *A sequence $t_0, t_1, \ldots$ for which $t_n \to \infty$ is such that*

$$\limsup_{n \to \infty} |B(t_n) - S_n| \leq (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \limsup_{n \to \infty} |n^{\frac{1}{2}} u_n|, \tag{1.41}$$

whenever $\sum u_n$ *is a series for which the right member of* (1.41) *is finite, if and only if*

$$\lim_{n\to\infty} (t_n - n)/n^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{1.42}$$

There is no sequence $t_0, t_1, \ldots$ *such that* $t_n \to \infty$ *and*

$$\limsup_{n\to\infty} |B(t_n) - S_n| < (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \limsup_{n\to\infty} |n^{\frac{1}{2}} u_n| \tag{1.43}$$

whenever $\sum u_n$ *is a series for which the right member of* (1.43) *is finite and positive.*

THEOREM 1.5. *A function* $n(t)$ *such that* $n(t)$ *is an integer for each* $t>0$ *and* $n(t)\to\infty$ *as* $t\to\infty$ *is such that*

$$\limsup_{t\to\infty} |B(t) - S_{n(t)}| \leq (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \limsup_{n\to\infty} |n^{\frac{1}{2}} u_n|, \tag{1.51}$$

whenever $\sum u_n$ *is a series for which the right member of* (1.51) *is finite, if and only if*

$$\lim_{t\to\infty} \{n(t) - t\}/t^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{1.52}$$

There is no function $n(t)$ *such that* $n(t)\to\infty$ *and*

$$\limsup_{t\to\infty} |B(t) - S_{n(t)}| < (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \limsup_{n\to\infty} |n^{\frac{1}{2}} u_n| \tag{1.53}$$

whenever $\sum u_n$ *is a series for which the right member of* (1.53) *is finite and positive.*

Theorems 1.4 and 1.5 imply the classic Tauberian theorem to the effect that if $B(t)\to S$ and $n^{\frac{1}{2}} u_n = o(1)$, then $S_n \to S$. theorems 1.4 and 1.5 neither imply nor are implied by the deeper Tauberian theorem to the effect that if $B(t)\to S$ and $u^{\frac{1}{2}} u_n = O(1)$, then $S_n \to S$. Theorems 1.4 and 1.5 do, however, supplement the latter theorem by showing that if $n^{\frac{1}{2}} u_n = O(1)$ and $\sum u_n$ is a series for which $\limsup |B(t)| = \infty$ [or $\limsup |S_n| = \infty$], then $\limsup |S_n| = \infty$ [or $\limsup |B(t)| = \infty$].

In section 4 to which we refer for details, it is shown that precisely the same results are obtained when (1.2) is replaced by a more general Tauberian condition of Schmidt type. The connection between our work and that of KARAMATA and RAJAGOPAL is pointed out in section 5.

2. Preliminary formulas. When (1.2) holds, all of the series below are absolutely convergent and we obtain

$$B(t) = e^{-t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} u_j = \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-t} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \right] u_k \tag{2.1}$$

and hence

$$B(t) - S_n = \sum_{k=1}^{n} - \left[1 - e^{-t} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \right] u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[e^{-t} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \right] u_k. \tag{2.2}$$

Our next step is to throw (2.2) into a form permitting application of a general theorem on linear transformations. Let

$$x_n = n^{\frac{1}{2}} u_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

so that the hypothesis (1.2) becomes $\limsup |x_n| = L < \infty$. For each $\alpha > 0$, let

$$a_k(\alpha) = -k^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \qquad 1 \leq k \leq n \tag{2.4}$$

and

$$a_k(\alpha) = k^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \qquad k > n. \tag{2.41}$$

Then (2.2) takes the standard form

$$B(t) - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha)\, x_k. \tag{2.5}$$

Let, where A may be finite or $+\infty$,

$$A = \limsup_{\alpha \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\alpha)|. \tag{2.6}$$

Since

$$\lim_{\alpha \to \infty} |a_k(\alpha)| = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.7}$$

it follows from a lemma of Agnew [1949] that

$$\limsup_{\alpha \to \infty} |B(t) - S_n| \leq A L \tag{2.8}$$

whenever (1.2) holds, and, moreover, A is the best constant in the sense that there is a series $\sum u_n$ of real terms for which (1.2) holds with $0 < L < \infty$ and equality holds in (2.8). Thus we can solve our problem by evaluating the constant A in (2.6).

3. Determination of A. From (2.4) and (2.41) we obtain, after changing orders of summation and interchanging j and k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\alpha)| = e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{j=k+1}^{n} j^{-\frac{1}{2}} \right] \frac{t^k}{k!} + e^{-t} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\sum_{j=n+1}^{k} j^{-\frac{1}{2}} \right] \frac{t^k}{k!}. \tag{3.1}$$

When $0 \leq p < q$,

$$\sum_{j=p+1}^{q} j^{-\frac{1}{2}} = \int_{p}^{q} x^{-\frac{1}{2}}\, dx - \varepsilon_{p,q} = 2(q^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}) - \varepsilon_{p,q} \tag{3.11}$$

where $0 < \varepsilon_{p,q} < p^{-\frac{1}{2}}$ when $p > 0$ and $0 < \varepsilon_{p,q} < 2$ when $p = 0$. From regularity of the Borel transformation, it follows that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\alpha)| = o(1) + 2e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} (n^{\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}) \frac{t^k}{k!} + 2e^{-t} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}) \frac{t^k}{k!}. \tag{3.12}$$

Therefore

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\alpha)| = o(1) + F(\alpha) \tag{3.2}$$

where

$$F(\alpha) = 2e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} |k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}| \frac{t^k}{k!}. \tag{3.21}$$

As we shall show, and as can be expected from the theory of the Poisson distribution in the theory of probability, the behavior of $F(\alpha)$ depends upon the behavior of the function $\omega = \omega(\alpha)$ defined by

$$\omega = (n - t)/t^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

or

$$n = t + \omega t^{\frac{1}{2}}. \tag{3.31}$$

We consider separately the cases in which $\limsup |\omega(\alpha)|$ is infinite and finite.

THEOREM 3.4. *If*

$$\limsup_{\alpha \to \infty} |\omega(\alpha)| = \infty \tag{3.41}$$

then $A = \limsup F(\alpha) = \infty$.

To prove this, let a be a constant for which $a > 1$. From (3.21) and (3.31) we obtain, when α is sufficiently large,

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\alpha) > 2e^{-t} \sum\limits_{|k-t| < at^{\frac{1}{2}}} |k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}| \frac{t^k}{k!} = 2e^{-t} \sum\limits_{|k-t| < at^{\frac{1}{2}}} \frac{|k-n|}{k^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} \frac{t^k}{k!} > \\ \quad > \frac{2}{(t - at^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} e^{-t} \sum\limits_{|k-t| < at^{\frac{1}{2}}} |k - (t + \omega t^{\frac{1}{2}})| \frac{t^k}{k!} \end{array} \right. \tag{3.42}$$

and hence

$$F(\alpha) > 2 \frac{(|\omega| - a) t^{\frac{1}{2}}}{(t - at^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} e^{-t} \sum_{|k-t| < at^{\frac{1}{2}}} \frac{t^k}{k!}. \tag{3.43}$$

The elementary formulas

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad t e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k t^k}{k!}, \quad t \frac{d}{dt} t e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 t^k}{k!} \tag{3.44}$$

give, for each real x, the formula

$$e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} (k - x)^2 \frac{t^k}{k!} = (t - x)^2 + t. \tag{3.441}$$

Using this formula with $x = t$ gives

$$e^{-t} \sum_{|k-t| \geq at^{\frac{1}{2}}} (k - t)^2 \frac{t^k}{k!} < t \tag{3.442}$$

and

$$e^{-t} \sum_{k-t \geq at^{\frac{1}{2}}} a^2 t \frac{t^k}{k!} < t \tag{3.443}$$

so

$$e^{-t}\sum_{k-t\geq at^{\frac{1}{2}}}\frac{t^k}{k!}<\frac{1}{a^2} \tag{3.444}$$

and therefore

$$e^{-t}\sum_{k-t|<at^{\frac{1}{2}}}\frac{t^k}{k!}>1-\frac{1}{a^2}. \tag{3.445}$$

This and (3.43) imply that

$$F(\alpha)>2\frac{(|\omega|-a)\,t^{\frac{1}{2}}}{(t-at^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\quad\left(1-\frac{1}{a^2}\right) \tag{3.45}$$

and the conclusion of Theorem 3.4 follows.

THEOREM 3.5. *If*

$$\limsup_{\alpha\to\infty}|\omega(\alpha)|<\infty \tag{3.51}$$

then

$$F(\alpha)=o(1)+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left[e^{-\omega^2/2}+|\omega|\int_0^{|\omega|}e^{-x^2/2}\,dx\right]. \tag{3.52}$$

To prove this, let $\varepsilon>0$. With ω defined by (3.31), the hypothesis (3.51) implies that $\lim n^{-1}t=1$ and that we can choose a positive constant a so great that

$$\limsup_{\alpha\to\infty}2n^{-\frac{1}{2}}(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}a^{-1}<\varepsilon. \tag{3.53}$$

We now split $F(\alpha)$ into the sum of two terms of which the first is

$$F_1(\alpha)=2e^{-t}\sum_{|k-t|>at^{\frac{1}{2}}}|k^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}|\,\frac{t^k}{k!}. \tag{3.54}$$

Since

$$|k^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}|=\frac{|k-n|}{k^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\leq\frac{|k-n|}{n^{\frac{1}{2}}} \tag{3.55}$$

we obtain

$$F_1(\alpha)\leq 2n^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\sum_{|k-t|>at^{\frac{1}{2}}}\left[(k-n)^2\frac{t^k}{k!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{t^k}{k!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.56}$$

Use of the Schwarz inequality gives

$$|F_1(\alpha)|\leq 2n^{-\frac{1}{2}}\left[e^{-t}\sum_{|k-t|>at^{\frac{1}{2}}}(k-n)^2\frac{t^k}{k!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[e^{-t}\sum_{|k-t|<at^{\frac{1}{2}}}\frac{t^k}{k!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.57}$$

Using (3.31), (3.441), (3.444), and (3.53) gives

$$\limsup_{\alpha\to\infty}F_1(\alpha)<\varepsilon. \tag{3.58}$$

Using (3.21) and (3.54) gives

$$F(\alpha)=F_1(\alpha)+2e^{-t}\sum_{|k-t|\leq at^{\frac{1}{2}}}|k^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}|\,\frac{t^k}{k!}. \tag{3.6}$$

For the range of values of k in the sum in (3.6),

$$2\left|k^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right| = t^{-\frac{1}{2}}|k-n|\left\{\frac{2t^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{3.61}$$

and the last factor in braces converges uniformly to 1 as $\alpha\to\infty$.

Therefore

$$F(\alpha) = o(1) + F_1(\alpha) + t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\sum_{|k-t|\leq at^{\frac{1}{2}}}|k-n|\frac{t^k}{k!}. \tag{3.62}$$

Putting

$$F_2(\alpha) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\sum_{|k-t|>at^{\frac{1}{2}}}|k-n|\frac{t^k}{k!} \tag{3.63}$$

and using the estimates following (3.55) gives

$$\limsup_{\alpha\to\infty} F_2(\alpha) < \varepsilon. \tag{3.64}$$

Moreover

$$F(\alpha) = o(1) + F_1(\alpha) - F_2(\alpha) + t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}|k-n|\frac{t^k}{k!} \tag{3.65}$$

and because of (3.58) and (3.64) we conclude that

$$F(\alpha) = o(1) + G(\alpha) \tag{3.66}$$

where

$$G(\alpha) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}|k-n|\frac{t^k}{k!}. \tag{3.7}$$

Splitting the sum in (3.7) into parts for which $0\leq k\leq n$ and $k>n$ and using (3.31) gives

$$G(\alpha) = g_1(\alpha) + g_2(\alpha) - \omega \tag{3.71}$$

where

$$g_1(\alpha) = 2t^{\frac{1}{2}}e^{-t}t^n/n!, \tag{3.72}$$

$$g_2(\alpha) = 2\omega e^{-t}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}. \tag{3.73}$$

Use of (3.72), (3.31) and STIRLING's formula for $n!$ gives

$$g_1(\alpha) = o(1) + (2/\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-\omega^2/2}. \tag{3.74}$$

The fundamental formula

$$e^{-t}\sum_{k\leq t+\omega t^{\frac{1}{2}}}\frac{t^k}{k!} = o(1) + (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\omega}e^{-x^2/2}\,dx \tag{3.75}$$

gives

$$g_2(\alpha) = o(1) + \omega\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\omega}e^{-x^2/2}\,dx \tag{3.76}$$

and hence

$$g_2(\alpha) - \omega = o(1) + |\omega| \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{|\omega|} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{3.77}$$

From (3.66), (3.71), (3.74), and (3.76) we obtain (3.52) and Theorem 3.5 is proved.

Because the result may be of interest in other connections, we pause to give the following Theorem.

THEOREM 3.8. *If n and t become infinite in such a way that the quantity ω defined by*

$$n = t + \omega t^{\frac{1}{2}} \tag{3.81}$$

is bounded, then

$$2e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} |k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}| \frac{t^k}{k!} = o(1) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |x - \omega|\, e^{-x^2/2}\, dx \tag{3.82}$$

and

$$t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} |k - n| \frac{t^k}{k!} = o(1) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |x - \omega|\, e^{-x^2/2}\, dx. \tag{3.83}$$

If $\limsup |\omega| = \infty$, *then the superior limits of the left members of* (3.82) *and* (3.83) *are infinite.*

To prove this Theorem, we observe that the left member of (3.82) is the function $F(\alpha)$ in (3.21) and (3.52), and that for each ω the integral in (3.82) is equal to the last part of (3.52). In case ω is bounded, (3.82) therefore follows from Theorem 3.5 and (3.83) then follows from (3.66) and (3.7); in case ω is unbounded the conclusion of Theorem 3.8 follows from Theorem 3.4. In case ω has a limit say, $\lim \omega = \omega_0$, (3.82) is valid and reduces to

$$\lim 2e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} |k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}| \frac{t^k}{k!} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |x - \omega_0|\, e^{-x^2/2}\, dx. \tag{3.84}$$

Since the last term in (3.52) increases with $|\omega|$, and attains its minimum value $(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$ when and only when $\omega = 0$, Theorems 3.4 and 3.5 show precisely how the best constants A defined in the introduction depend upon the given functions $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$. In case $\limsup |\omega(\alpha)| = \infty$, that is

$$\limsup |n - t|/t^{\frac{1}{2}} = \infty, \tag{3.9}$$

we see from Theorem 3.4 that $A = \infty$. In case

$$\limsup |n - t|/t^{\frac{1}{2}} = M < \infty, \tag{3.91}$$

we see from Theorem 3.5 that

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[e^{-M^2/2} + M \int_0^M e^{-x^2/2}\, dx\right]. \tag{3.92}$$

This constant A attains its minimum value

$$A_0 = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} = 0 \cdot 79788\ 45608\ 02865\ 35587\ 98921 \tag{3.93}$$

when and only when $M = 0$, that is

$$\lim (n - t)/t^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{3.94}$$

4. Schmidt conditions. It is well known and easy to prove that if a series $\sum u_n$ satisfies the Tauberian condition (1.2), then its partial sums $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ satisfy the more general Tauberian condition

$$\limsup_{p \to \infty} \text{maximum}_{|q-p| \leq \lambda p^{\frac{1}{2}}} |S_q - S_p| \leq L\lambda, \qquad \lambda > 0, \tag{4.1}$$

of Schmidt type.

Letting $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$ be defined as in section 1, we determine the least constant A', which depends upon the functions $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$ and which is either finite or $+\infty$, such that

$$\limsup_{\alpha \to \infty} |B(t) - S_n| \leq A'L \tag{4.11}$$

whenever $\sum u_n$ is a series for which (4.1) holds.

Since each series satisfying (1.2) also satisfies (4.1), it is clear from the definitions of A and A' in (1.3) and (4.11) that $A' \geqq A$. If for some functions $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$ it were true that $A' > A$, it would perhaps be difficult to determine A' because the condition (4.1) is not as tractable as the condition (1.2). However, as we shall show, matters are greatly simplified by the fact that we always have $A' = A$. Since we know that $A' \geqq A$, we can prove this by proving that $A' \leqq A$. In case the function $\omega = \omega(\alpha)$ defined by (3.3) is such that $\limsup |\omega(\alpha)| = \infty$, we have $A = \infty$ and the inequality $A' \leqq A$ is automatically satisfied. Thus we can complete the proof that $A' = A$ by proving the following special result which we formulate as a lemma.

Lemma 4.2. *If $n(\alpha)$ and $t(\alpha)$ are such that* $\limsup |\omega(t)| = M < \infty$ *and if* $\sum u_n$ *is a series satisfying* (4.1), *then* (4.11) *holds when A' is the right member of* (1.32) *and* (1.33).

To prove this lemma, let $H(\alpha) = B(t) - S_n$ so that

$$H(\alpha) = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (S_k - S_n). \tag{4.21}$$

Let $\varepsilon > 0$ and choose a positive constant a so great that $a > 1$ and (3.53) holds. Then

$$|H(\alpha)| \leq H_1(\alpha) + H_2(\alpha) \tag{4.22}$$

where

$$H_1(\alpha) = e^{-t} \sum_{|k-t| > at^{\frac{1}{2}}} \frac{t^k}{k!} |S_k - S_n| \tag{4.23}$$

and

$$H_2(\alpha) = e^{-t} \sum_{|k-t| \leq at^{\frac{1}{2}}} \frac{t^k}{k!} |S_k - S_n|. \tag{4.24}$$

SCHMIDT [1925, page 232] has obtained a result which implies that if a series $\sum u_n$ satisfies (4.1), then there is a constant C such that the inequality

$$|S_k - S_n| \leq C\,|k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}| \tag{4.25}$$

holds whenever k and n are nonnegative integers for which $|k-n| > n^{\frac{1}{2}}$. Since $a > 1$ and $\omega(\alpha)$ is bounded so that $t(\alpha)/n(\alpha) \to 1$ as $\alpha \to \infty$, it follows that if α is sufficiently great then the inequality $|k-t| > a\,t^{\frac{1}{2}}$ implies that $|k-t| > n^{\frac{1}{2}}$ and hence that

$$H_1(\alpha) \leq C\,e^{-t} \sum_{|k-t| > a\,t^{\frac{1}{2}}} |k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}|\,\frac{t^k}{k!}. \tag{4.26}$$

Use of the formulas (3.54) to (3.58) then shows that

$$\limsup_{\alpha \to \infty} H_1(\alpha) \leq C\,\varepsilon. \tag{4.27}$$

To estimate $H_2(\alpha)$, let N be an integer so great that $N > 1$ and

$$\frac{a}{N} \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}\,dx < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Starting with (4.24) then gives

$$H_2(\alpha) = e^{-t} \sum_{p=-N}^{N-1} \sum_{k\,\varepsilon\,E(p,\alpha)} \frac{t^k}{k!}\,|S_k - S_n| \tag{4.4}$$

where $E(p, \alpha)$ is the set of nonnegative integers k for which

$$t + \frac{p}{N}\,a\,t^{\frac{1}{2}} \leq k \leq t + \frac{p+1}{N}\,a\,t^{\frac{1}{2}}. \tag{4.41}$$

From (4.4) we obtain

$$H_2(\alpha) \leq e^{-t} \sum_{p=-N}^{N-1} \left[\sum_{k\,\varepsilon\,E(p,\alpha)} \frac{t^k}{k!} \right] f_p(\alpha) \tag{4.42}$$

where

$$f_p(\alpha) = \max_{k\,\varepsilon\,E(p,\alpha)} |S_k - S_n|. \tag{4.43}$$

From (4.43) and the definitions of $\omega(\alpha)$ and $E(p, \alpha)$ in (3.3) and (4.41) we obtain

$$f_p(\alpha) = \underset{(p\,N^{-1}a - \omega)\,t^{\frac{1}{2}} \leq k-n \leq [(p+1)\,N^{-1}a - \omega]\,t^{\frac{1}{2}}}{\text{maximum}} |S_k - S_n| \tag{4.44}$$

and hence

$$f_p(\alpha) \leq \underset{|k-n| \leq x(p,\alpha)\,t^{\frac{1}{2}}}{\text{maximum}} |S_k - S_n| \tag{4.45}$$

where

$$x(p, \alpha) = \max\left\{ \left| \frac{p}{N}\,a - \omega \right|,\ \left| \frac{p+1}{N}\,a - \omega \right| \right\}. \tag{4.46}$$

We estimate the functions $f_p(\alpha)$ by use of the following lemma.

Lemma 4.5. *If* $\sum u_n$ *satisfies the* Schmidt *condition* (4.1) *and if*

$$f(\alpha) = \underset{|k-n(\alpha)| \leq x(\alpha)[t(\alpha)]^{\frac{1}{2}}}{\text{maximum}} |S_k - S_{n(\alpha)}| \tag{4.51}$$

where $n(\alpha)$, $t(\alpha)$, *and* $x(\alpha)$ *are positive functions for which* $n(\alpha) \to \infty$ *and* $t(\alpha)/n(\alpha) \to 1$ *as* $\alpha \to \infty$ *and* $x(\alpha)$ *is bounded. Then to each* $\varepsilon > 0$ *corresponds a number* α_0 *such that*

$$f(\alpha) < L\,x(\alpha) + \varepsilon, \qquad \alpha > \alpha_0. \tag{4.52}$$

To prove this lemma, suppose that the conclusion is false. Then for some $\varepsilon > 0$ there is a sequence $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ such that $\alpha_p \to \infty$ and

$$f(\alpha_p) \geq L\,x(\alpha_p) + \varepsilon, \qquad p = 1, 2, \ldots. \tag{4.53}$$

Since the function $x(\alpha)$ is bounded, the sequence α_p can be chosen such that $\lim_{p \to \infty} x(\alpha_p)$ exists and is a number x_0. Let $h > 0$. We then have, for each sufficiently great p,

$$\underset{|k-n(\alpha_p)| \leq (x_0+h)(1+h)[n(\alpha_p)]^{\frac{1}{2}}}{\text{maximum}} |S_k - S_{n(\alpha_p)}| \geq L(x_0 - h) + \varepsilon, \tag{4.54}$$

and use of the hypothesis (4.1) gives

$$L(x_0 + h)(1 + h) \geq L(x_0 - h) + \varepsilon. \tag{4.55}$$

Since (4.55) holds for each $h > 0$, it implies that $\varepsilon \leq 0$ and gives a contradiction that establishes Lemma 4.5.

Applying Lemma 4.5 to the functions $f_p(\alpha)$ in (4.45), we find that there is a number α_0 such that, for each integer p in the interval $-N \leq p \leq N-1$,

$$f_p(\alpha) \leq L\,x(p, \alpha) + \varepsilon, \qquad \alpha > \alpha_0. \tag{4.6}$$

This and (4.42) imply that

$$H_2(\alpha) \leq e^{-t} \sum_{p=-N}^{N-1} \left[\sum_{k \in E(p,\alpha)} \frac{t^k}{k!} \right] [L\,x(p, \alpha) + \varepsilon] \tag{4.61}$$

when $\alpha > \alpha_0$. Hence

$$H_2(\alpha) \leq \varepsilon + L \sum_{p=-N}^{N-1} \left[e^{-t} \sum_{k \in E(p,\alpha)} \frac{t^k}{k!} \right] x(p, \alpha) \tag{4.62}$$

when $\alpha > \alpha_0$. Using the definition of $E(p, \alpha)$ in (4.41) and the fundamental formula (3.75), we see that the quantity in square brackets in the right member of (4.62) converges to

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{pN^{-1}a}^{(p+1)N^{-1}a} e^{-u^2/2}\,du \tag{4.63}$$

as $\alpha \to \infty$. Hence we can apply the simple fact that if

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\alpha)\,h_k(\alpha) \tag{4.64}$$

where all of the functions involved are nonnegative and bounded and $\lim_{\alpha\to\infty} g_k(\alpha) = G_k$ for each k, then

$$\limsup_{\alpha\to\infty} f(\alpha) = \limsup_{\alpha\to\infty} \sum_{k=1}^{n} G_k h_k(\alpha). \tag{4.65}$$

This and (4.62) give

$$\limsup_{\alpha\to\infty} H_2(\alpha) \leqq \varepsilon + (2\pi)^{-\frac{1}{2}} L \limsup_{\alpha\to\infty} H_3(\alpha) \tag{4.7}$$

where

$$H_3(\alpha) = \sum_{p=-N}^{N-1} \left[\int_{pN^{-1}a}^{(p+1)N^{-1}a} e^{-u^2/2}\, du \right] x(p,\alpha). \tag{4.71}$$

From (4.46) we see that

$$x(p,\alpha) = |x_p - \omega| \tag{4.72}$$

where x_p is, for each p and α, a number for which $pN^{-1}a \leqq x_p \leqq (p+1)N^{-1}a$. Hence when $pN^{-1}a \leqq x \leqq (p+1)N^{-1}a$ we have $|x - x_p| \leqq N^{-1}a$ and consequently

$$x(p,\alpha) \leqq N^{-1}a + |x - \omega|. \tag{4.73}$$

This and (4.71) give

$$H_3(\alpha) = \sum_{p=-N}^{N-1} \int_{pN^{-1}a}^{(p+1)N^{-1}a} e^{-x^2/2} [N^{-1}a + |x - \omega|]\, dx \tag{4.74}$$

and use of (4.3) gives

$$H_3(\alpha) \leqq \varepsilon + \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2} |x - \omega|\, dx. \tag{4.75}$$

Using (4.22), (4.27), (4.7) and (4.75) gives

$$\limsup_{\alpha\to\infty} |H(\alpha)| \leqq C\varepsilon + \varepsilon + \frac{L}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \limsup_{\alpha\to\infty} \varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} |x - \omega|\, dx. \tag{4.76}$$

Since (4.76) holds for each $\varepsilon > 0$, it implies that

$$\limsup_{\alpha\to\infty} H(\alpha) = \frac{L}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \limsup_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} |x - \omega|\, dx. \tag{4.77}$$

Therefore (4.11) holds when

$$A' = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} |x - M|\, dx \tag{4.78}$$

where M is defined as before by the formula

$$M = \limsup_{\alpha\to\infty} |\omega(t)| = \limsup_{\alpha\to\infty} |n - t|/t^{\frac{1}{2}}. \tag{4.79}$$

Since the right member of (4.78) is the right member of (1.33), this completes the proof of Lemma 4.2. The equality $A' = A$ is therefore established.

5. Conclusion. Since (3.94) obviously holds when $n = [t]$, the greatest integer in t, our results include that of RAJAGOPAL [1953] to the effect that

$$\limsup_{t\to\infty} |B(t) - S_{[t]}| \leq (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \limsup_{n\to\infty} |n^{\frac{1}{2}} u_n| \tag{5.1}$$

whenever $\sum u_n$ is a series for which the right member is finite. RAJAGOPAL [1953] showed, by giving a specific numerical series $\sum u_n$ suuplied to him by T. VIJAYARAGHAVAN, that the constant $(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$ is the least constant for which (5.1) is valid. Without undertaking to determine best constants, KARAMATA [1938] obtained inequalities involving $|B(t) - S_n|$ for the case in which $t = n + an^{\frac{1}{2}}$, a is a constant, and $\sum u_n$ satisfies a Tauberian condition of Schmidt type. KARAMATA obtained Tauberian Theorems which employ the hypothesis that $\lim B(t)$ exists and which neither imply nor are implied by our Theorems involving (1.3). The papers of KARAMATA and RAJAGOPAL contain references to earlier works on the subject.

References

AGNEW, R. P. [1949]: Abel transforms and partial sums of Tauberian series. Ann. of Math. (2) **50**, 110—117. — KARAMATA, JOVAN [1938]: O jednom opštem O-inversnom stavu. Rad Jugoslavenske Akademije Znanosti i Umjetnosti, Knjiga 261, Matematicko-Prirodoslovni Razred 81, pp. 1—22. — RAJAGOPAL, C. T. [1953]: A generalization of TAUBER's Theorem and some Tauberian constants. Math. Z. **57**, 405—414. — SCHMIDT, ROBERT [1925]: Die Umkehrsätze des Borelschen Summierungsverfahrens. Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, Naturwiss. Kl. **1**, 205—256.

Cornell University, Ithaca, New York

(Eingegangen am 29. September 1956)

Laugwitz, D.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 63—74 (1957)

Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Vektorräumen und zur affingeometrischen Deutung der Theorie der Finsler-Räume

Von

Detlef Laugwitz

Die vorliegenden Untersuchungen sind veranlaßt von einer von E. R. Lorch bemerkten Tatsache: Mit einer glatten Hyperfläche $\mathfrak{F}$ in einem reellen Vektorraum (= radialaffinen Raum) ist eine Riemannsche Metrik in diesem Raume gegeben, die nach ihrer Definition affininvariant mit der Fläche $\mathfrak{F}$ verknüpft ist. Diese Maßbestimmung, die zunächst bei Hyperflächen im Hilbertschen Raum für funktionalanalytische Anwendungen eingeführt wurde, besitzt auch im endlichdimensionalen Fall interessante differentialgeometrische Eigenschaften, deren Untersuchung in einer früheren Arbeit begonnen wurde[1]). Hier setzen wir diese Untersuchung fort, indem wir die auf der Hyperfläche $\mathfrak{F}$ selbst induzierte Riemannsche Flächenmetrik betrachten.

Wir geben zunächst eine geometrische Definition dieser Flächenmetrik (§ 1) und zeigen dann in § 2, daß diese Metrik im endlichdimensionalen Fall (bis auf einen unwesentlichen Faktor) mit der bekannten Flächenmetrik der radialaffinen Geometrie von E. Salkowski[2]) zusammenfällt. Es wird hier also ein neuer Aufbau der radialaffinen Flächentheorie ermöglicht, dessen Grundzüge wegen der von Salkowskis Darstellung wesentlich verschiedenen Methode hier kurz skizziert werden. Außerdem ermöglicht unsere Methode eine Erweiterung auf unendlichdimensionale Räume, also auf die besonders von Lorch[3]) betrachteten Fälle; eine solche Verallgemeinerung wäre mit der Salkowskischen Methode, in der n-reihige Determinanten eine wichtige Rolle spielen, nicht möglich. Diese Erweiterung ergibt sich mittels der früher entwickelten Tensorrechnung für unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten[4]); dieser Kalkül — bei dem man das Erscheinungsbild der Formeln gegenüber der klassischen Tensorrechnung nicht abzuändern braucht — bringt bei dem vorliegenden Gegenstand auch für endlichdimensionale Vektorräume den

---

[1]) Laugwitz, D., and E. R. Lorch: Riemannian metrics associated with convex bodies in normed spaces. Amer. J. Math. **78**, 889—894 (1956).

[2]) Salkowski, E.: Affine Differentialgeometrie. Berlin-Leipzig 1934.

[3]) A curvature study of convex bodies in Banach spaces. Annali mat. pura appl. (IV) **34**, 105—112 (1953).

[4]) Math. Z. **61**, 100—118 (1954); für unendlichdimensionale Minkowskische und Finslersche Räume: Grundlagen für die Geometrie der unendlichdimensionalen Finsler-Räume. Annali mat. pura appl. (IV) **41**, 21—41 (1955).

begrifflich befriedigenderen Vorteil, daß ein basisfreies Rechnen (also eine Operation mit Vektoren selbst und nicht mit Komponenten) möglich ist. Demgemäß sind alle Formeln so gehalten, daß sie — sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist — sowohl im Sinne der üblichen Tensorrechnung als auch gemäß der erwähnten Verallgemeinerung[4]) für unendlichdimensionale Räume gültig sind.

Radialaffine Räume haben für die Differentialgeometrie ein besonderes Interesse, weil sie als Tangentialräume differenzierbarer Mannigfaltigkeiten auftreten. Insbesondere ist ein Finslerscher Raum[5]) dadurch definiert, daß im Tangentialraum eines jeden seiner Punkte eine Hyperfläche als Indikatrix ausgezeichnet ist, wodurch dieser Tangentialraum zu einem Minkowskischen Raum wird. Unsere Auffassung der radialaffinen Flächentheorie läßt sich unmittelbar auf die Indikatrix anwenden — der Fundamentaltensor der Riemannschen Metrik von LORCH ist formal identisch mit dem Fundamentaltensor der Minkowskischen Maßbestimmung —, und dadurch wird sich eine affingeometrische Deutung der von E. CARTAN in der Finslerschen Geometrie eingeführten Tensoren ergeben[6]). Die von O. VARGA kürzlich[7]) durchgeführte Krümmungstheorie der Indikatrix eines Minkowskischen Raumes läßt sich — wie schon in einer früheren Arbeit, l. c.[1]), angedeutet wurde — hier einbauen und erweist sich als im wesentlichen identisch mit der Krümmungstheorie der radialaffinen Flächengeometrie.

Es darf wohl behauptet werden, daß von unserem Standpunkt eine geometrisch befriedigende Synthese der beiden Auffassungen des Finslerschen Raumes — Linienelement-Auffassung von E. CARTAN einerseits und sog. lokal-Minkowskische Auffassung von H. RUND und anderen — ermöglicht wird. Danach wird man den Finslerschen Raum auffassen als einen Punktraum, in dessen Tangentialräumen vermöge der Indikatrix einmal je eine Minskowskische Metrik (Norm) definiert ist, wobei zum anderen aber durch die Raummetrik der radialaffinen Geometrie auch ein natürlicher geometrischer Einbau der Auffassung von CARTAN möglich ist. Dadurch bleibt der anschauliche Charakter eines Punktraumes gewahrt, es wird aber der wegen seiner Linearisierungen bequeme Cartansche Kalkül mit übernommen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß hier — anders als in SALKOWSKIs Affingeometrie — eine Metrik nicht nur in der Fläche, sondern im ganzen Raume definiert ist, und zwar in affininvarianter Weise. Man kann daher z.B. eine zweite Fläche $\mathfrak{F}'$ betrachten, die dann in diesem Riemannschen Raume eingebettet erscheint. Dadurch ergeben sich neue Gesichtspunkte für die Geometrie der Flächenpaare und für die relative Differentialgeometrie, worauf in einer späteren Arbeit eingegangen werden soll.

---

[5]) CARTAN, E.: Les espaces de FINSLER. Paris 1934.

[6]) § 7 der vorliegenden Arbeit.

[7]) Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Raumes. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 41—51 (1955).

§ 1. Einführung der zu einer Hyperfläche gehörigen Raummetrik

Es sei $\mathfrak{F}$: $x^i = x^i(u^\alpha) \neq 0$ eine Hyperfläche in einem reellem Vektorraum, $\underset{0}{x^i}$ ein Punkt dieser Fläche. Dann wird es (bei gewissen Voraussetzungen über Differenzierbarkeit und lineare Unabhängigkeit) unter den Quadriken mit Mittelpunkt 0 genau eine, $\mathfrak{F}_2(\underset{0}{x})$, geben, welche $\mathfrak{F}$ in $\underset{0}{x}$ oskuliert. Diese Quadrik dient zu einer Einführung einer Riemannschen Maßbestimmung im Vektorraum (mit Ausnahme des Nullpunktes):

Ein im Punkte $r \cdot \underset{0}{x^i}$ $(r > 0)$ *angetragener Vektor* y^i *hat die Länge* $L = L(y; \underset{0}{x})$, *wenn folgendes gilt: Verschiebt man* y^i *parallel, so daß der Anfangspunkt in den Nullpunkt fällt, dann liegt sein Endpunkt auf der Fläche* $L \cdot \mathfrak{F}_2(\underset{0}{x})$.

Damit ist für Kurven $x^i(t)$ (insbesondere für solche auf der Fläche $\mathfrak{F}$ selbst) ein Bogenelement definiert:

$$ds = L(\dot{x}^i; x^i)\, dt.$$

Wir werden die analytischen Voraussetzungen so einzurichten haben, daß

1. die oskulierende Quadrik eindeutig bestimmt ist,
2. die Flächenmetrik nicht ausgeartet ist.

Zur analytischen Durchführung der angegebenen Konstruktion denken wir uns das Flächenstück implizit gegeben durch

$$F(x^i) = 1, \qquad F(r\,x^i) = r \cdot F(x^i) \qquad \text{für} \qquad r > 0.$$

(Diese Darstellung ist immer möglich, wenn die Fläche sternförmig zum Nullpunkt liegt, d.h. mit jedem Halbstrahl höchstens einen Punkt gemeinsam hat.) Wir setzen zusätzlich voraus, daß die Funktion $F^2(x)$ viermal stetig differenzierbar sei (für $x \neq 0$). Es soll nun die Gleichung der oskulierenden Quadrik $\mathfrak{F}_2(\underset{0}{x})$ bestimmt werden. Wir nehmen an, die gesuchte Quadrik sei (in Abhängigkeit vom Flächenpunkt $\underset{0}{x}$) gegeben durch

$$g_{ik}(\underset{0}{x})\, y^i y^k = 1 \qquad (g_{ik} \text{ symmetrisch}).$$

$g_{ik}(\underset{0}{x})$ soll nun so bestimmt werden, daß

$$G(y) = F^2(y) - g_{ik}(\underset{0}{x})\, y^i y^k$$

für $y = \underset{0}{x}$ von möglichst hoher Ordnung verschwindet. Die Taylorsche Formel liefert (nach einfachen Umrechnungen mit Hilfe der Eulerschen Homogenitätsbeziehung)

$$G(y) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(\underset{0}{x})}{\partial x^i \partial x^k} - g_{ik}(\underset{0}{x})\right) y^i y^k + R,$$

wobei R von mindestens dritter Ordnung in $y - \underset{0}{x}$ ist. Soll also $G(y)$ in $y = \underset{0}{x}$ von zweiter Ordnung verschwinden, so ergibt sich als eindeutige Festlegung

von $g_{ik}(\underset{0}{x})$:

$$g_{ik}(\underset{0}{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(\underset{0}{x})}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Damit ist die oskulierende Fläche zweiter Ordnung eindeutig bestimmt. Wiederholt man die Konstruktion für alle Flächenpunkte, und beachtet man, daß die Riemannsche Raummetrik nach der vorhin angegebenen geometrischen Konstruktion durch homogene Fortsetzung entsteht, so hat man allgemein für alle Raumpunkte x:

$$g_{ik}(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x)}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Die in der Fläche $\mathfrak{F}$ induzierte Metrik

$$g_{\alpha\beta} = g_{ik}\, x^i_\alpha\, x^k_\beta, \qquad x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

(griechische Indizes für Flächenparameter, lateinische für Raumvektoren) ist für uns von besonderem Interesse.

Es sei bemerkt, daß der Tensor $g_{ik}(x)$ in der Minkowskischen Geometrie eine Rolle spielt: Wenn die Fläche konvex und geschlossen ist, und wenn $g_{ik}(x)\, y^i y^k$ für jedes x eine positiv definite Form ist (wenn also die oskulierenden Quadriken Ellipsoide sind), dann wird dieser Tensor als Fundamentaltensor der Minkowskischen Geometrie verwendet. Dieser Bezug zur Minkowskischen Geometrie wird uns später interessieren.

§ 2. Übereinstimmung der Flächenmetrik mit der der radialaffinen Geometrie von Salkowski[8])

SALKOWSKI (l. c.[2]) hat eine Maßbestimmung für Flächen im radialaffinen Raum definiert durch

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{(x_{\alpha\beta}, x_1, \ldots, x_{n-1})}{(x, x_1, \ldots, x_{n-1})}.$$

[Die Determinante $(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ soll von Null verschieden sein, d.h. die Tangentialebene nicht durch den Nullpunkt gehen.] Wir wollen zeigen, daß für die im vorigen Abschnitt definierte Flächenmetrik $g_{\alpha\beta}$ gilt: $g_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}$. Dazu leiten wir ein einfaches Lemma her:

Lemma. *Für jeden Flächenpunkt $x^i = x^i(u^\alpha)$ sind die beiden linearen Funktionale*

$$\lambda(y) = \frac{(y, x_1 \ldots x_{n-1})}{(x, x_1 \ldots x_{n-1})} \qquad \textit{und} \qquad \mu(y) = g_{ik}(x)\, x^i y^k$$

gleich:

$$g_{ik}(x)\, x^i y^k = \frac{(y, x_1, \ldots, x_{n-1})}{(x, x_1, \ldots, x_{n-1})}.$$

[8]) Man vergleiche dazu auch eine demnächst in den Publ. math. (Debrecen) erscheinende Note des Verf.: Eine Beziehung zwischen affiner und Minkowskischer Differentialgeometrie.

Beweis. Offensichtlich gilt

$$\lambda(x) = 1, \qquad \lambda(x_\alpha) = 0.$$

Andererseits hat man auch $\mu(x) = g_{ik}(x)\, x^i x^k = 1$, und durch Differentiation nach u folgt daraus

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\,(g_{ik}(x)\, x^i x^k) = 2 g_{ik}(x)\, x^i x_\alpha^k = 2 \cdot \mu(x_\alpha).$$

(Dabei wurde wieder von der Eulerschen Homogenitätsrelation Gebrauch gemacht:

$$\frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^j}\, x^k = 0.\,)$$

Die beiden Linearformen λ und μ stimmen also für die n linear unabhängigen Vektoren x, x_α überein, woraus die Behauptung folgt.

Aus $g_{ik}(x)\, x^i x_\alpha^k = 0$ folgert man wieder unter Beachtung der Eulerschen Relation durch Differentiation nach u^β:

$$g_{ik}(x)\, x_\alpha^i x_\beta^k + g_{ik}(x)\, x_{\alpha\beta}^i x^k = 0,$$

und daraus sowie aus dem Lemma, angewendet für $y = x_{\alpha\beta}$, folgt

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ik}(x)\, x^i x_{\alpha\beta}^k = -\, g_{ik}(x)\, x_\alpha^i x_\beta^k = -\, g_{\alpha\beta}.$$

Die affine Flächenmetrik $\gamma_{\alpha\beta}$ von Salkowski *und unsere Metrik $g_{\alpha\beta}$ aus § 1 stimmen bis aufs Vorzeichen überein.*

Aus der geometrischen Einführung unserer Maßbestimmung in § 1 ergibt sich somit zugleich eine neue geometrische Deutung der Metrik von Salkowski.

§ 3. Die Ableitungsgleichungen der affinen Flächentheorie und die kubische Fundamentalform

Da die Fläche $\mathfrak{F}$ gemäß § 1 in einem Riemannschen Raum eingebettet erscheint, kann man den Normalenvektor n^i und die zweite Fundamentalform $L_{\alpha\beta}$ der Fläche $\mathfrak{F}$ in diesem Riemannschen Raum bestimmen. Wir setzen jetzt voraus, daß $g_{ik}(x)$ invertierbar ist:

$$g^{ir} g_{rk} = \delta_k^i.$$

Wegen

$$g_{ik}(x)\, x^i x_\alpha^k = 0, \qquad g_{ik}(x)\, x^i x^k = 1$$

kommt für den Normalvektor nur in Frage $n^i = \pm x^i$; wir entscheiden uns hier aus gleich ersichtlichen Gründen für das Minuszeichen:

$$n^i = -\, x^i.$$

Die zweite Fundamentalform berechnet sich zu (; für kovariante Ableitung)

$$L_{\alpha\beta} = x^i_\alpha x^k_\beta n_{k;i} = x^i_\alpha x^k_\beta \left(g_{kj}(x)\, x^j\right)_{;i}$$
$$- x^i_\alpha x^k_\beta g_{kj}\left(\delta^j_i + \left\{\begin{matrix} j \\ i\,r \end{matrix}\right\} x^r\right) = g_{\alpha\beta}.$$

Es ergibt sich also:

Die zweite Fundamentalform fällt mit der ersten zusammen. (Alle Flächenpunkte sind Nabelpunkte; die Indikatrix teilt also auch diese Eigenschaft mit der Sphäre des euklidischen Raumes.)

Daher reduzieren sich die Ableitungsgleichungen auf die „Gaußsche" Gleichung:

$$x^i_{\alpha\beta} = A^\varrho_{\alpha\beta} x^i_\varrho + L_{\alpha\beta} n^i = A^\varrho_{\alpha\beta} x^i_\varrho - g_{\alpha\beta} x^i.$$

Nach Überschieben mit $g_{ik}(x) x^k_\gamma$ folgt daraus

$$g_{ik}(x)\, x^i_{\alpha\beta} x^k_\gamma = g_{\varrho\gamma} A^\varrho_{\alpha\beta}.$$

Um $A^\varrho_{\alpha\beta}$ zu berechnen, differenzieren wir die Beziehungen

$$g_{\alpha\beta} = g_{ik} x^i_\alpha x^k_\beta = - g_{ik} x^i x^k_{\alpha\beta}$$

nach u^γ:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = g_{ikj} x^i_\alpha x^k_\beta x^j_\gamma + g_{ik} x^i_{\alpha\gamma} x^k_\beta + g_{ik} x^i_\alpha x^k_{\beta\gamma} = - g_{ik} x^i_\gamma x^k_{\alpha\beta} - g_{ik} x^i x^k_{\alpha\beta\gamma}$$

(mit $g_{ikj} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$, Indizes an x^i für Ableitung). Aus der ersten Beziehung ergibt sich für die Christoffel-Symbole der Fläche:

$$\{\alpha\beta,\gamma\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\right) = \frac{1}{2} g_{ikj} x^i_\alpha x^k_\beta x^j_\gamma + g_{ik} x^i_{\alpha\beta} x^k_\gamma.$$

Wir führen den folgenden Tensor ein

$$a_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2} g_{ikj} x^i_\alpha x^k_\beta x^j_\gamma; \qquad a^\varrho_{\alpha\beta} = g^{\varrho\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}, \qquad g^{\varrho\gamma} g_{\gamma\sigma} = \delta^\varrho_\sigma$$

und erhalten

$$g_{\varrho\gamma} A^\varrho_{\alpha\beta} = g_{ik} x^i_{\alpha\beta} x^k_j = \{\alpha\beta,\gamma\} - a_{\alpha\beta\gamma}.$$

Die Ableitungsgleichungen gewinnen damit die Gestalt:

$$x^i_{\alpha\beta} = \left(\left\{\begin{matrix} \varrho \\ \beta\,\alpha \end{matrix}\right\} - a^\varrho_{\alpha\beta}\right) x^i_\varrho - g_{\alpha\beta} x^i.$$

Ihre Koeffizienten drücken sich allein durch $g_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta\gamma}$ aus; es ist darum naheliegend, mittels des symmetrischen Tensors $a_{\alpha\beta\gamma}$ eine *kubische Fundamentalform* zusätzlich zur metrischen Fundamentalform $g_{\alpha\beta}$ einzuführen.

Schon aus der Gestalt der Ableitungsgleichungen geht hervor, daß die kubische Fundamentalform verantwortlich ist für die Abweichung des Raumes vom euklidischen Verhalten. Wir bemerken dazu noch:

$a_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß $g_{ijk} = 0$, d.h. daß die Fläche $\mathfrak{F}$ eine Mittelpunktsquadrik ist.

Dies ist in der Richtung „dann" selbstverständlich. In der Richtung „nur dann" folgt die Bemerkung aus den beiden Beziehungen

$$0 = a_{\alpha\beta\gamma} = g_{ijk}\, x^i_\alpha\, x^j_\beta\, x^k_\gamma \quad \text{und} \quad 0 = g_{ijk}\, x^i.$$

Wir zeigen nun noch, daß unsere kubische Fundamentalform a identisch ist mit der von SALKOWSKI eingeführten, deren Koeffizienten definiert sind durch

$$\bar{a}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{(x^i_{\alpha;\beta;\gamma}, x_1, \ldots, x_{n-1})}{(x, x_1, \ldots, x_{1n-})}.$$

Nach unserem Lemma (§ 2) ist zunächst

$$\bar{a}_{\alpha\beta\gamma} = g_{ik}\, x^i_{\alpha;\beta;\gamma}\, x^k.$$

Nun gilt nach den Ableitungsgleichungen

$$x^i_{\alpha;\beta} = x^i_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} x^i_\varrho = a^\varrho_{\alpha\beta}\, x^i_\varrho - g_{\alpha\beta}\, x^i.$$

Andererseits ist

$$0 = g_{\alpha\beta;\gamma} = -\,(g_{ik}\, x^i_{\alpha;\beta}\, x^k)_{;\gamma} = -\,g_{ik}\, x^i_{\alpha;\beta;\gamma}\, x^k - g_{ik}\, x^i_{\alpha;\beta}\, x^k_\gamma.$$

Aus beidem zusammen ergibt sich

$$\bar{a}_{\alpha\beta\gamma} = g_{ik}\, x^i_{\alpha;\beta;\gamma}\, x^k = -\,g_{ik}\, x^i_{\alpha;\beta}\, x^k_\gamma = g_{ik}\, x^i_\varrho\, x^k_\gamma\, a^\varrho_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma},$$

was zu beweisen war.

Es sei bemerkt, daß $a^\alpha_{\beta\gamma}$ außerdem übereinstimmt mit dem in VARGAs Arbeit (l. c.[7]) auftretenden Tensor $\sum^\alpha_{\beta\gamma}$.

§ 4. Die Integrabilitätsbedingungen und die Bestimmung einer Fläche durch die beiden Fundamentalformen

Um die Integrabilitätsbedingungen der Ableitungsgleichungen

$$x^i_{\alpha\beta} = \left(\left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} - a^\varrho_{\alpha\beta} \right) x^i_\varrho - g_{\alpha\beta}\, x^i$$

zu finden, berechnen wir $x^i_{\alpha\beta\gamma} - x^i_{\alpha\gamma\beta}$ und drücken alles vermöge der Ableitungsgleichungen durch x und x_ϱ aus. Man rechnet leicht nach, daß der Koeffizient von x hierin die Symmetrie der kubischen Fundamentalform ausdrückt. Das Verschwinden der Koeffizienten von x^i_ϱ ergibt jedoch nichttriviale Bedingungen:

$$R^\varrho_{\beta\gamma\delta} = g_{\beta\gamma}\,\delta^\varrho_\delta - g_{\beta\delta}\,\delta^\varrho_\gamma + a^\sigma_{\beta\gamma}\, a^\varrho_{\sigma\delta} - a^\sigma_{\beta\delta}\, a^\varrho_{\sigma\gamma} + g^{\varrho\sigma}\, a_{\sigma\beta\gamma;\delta} - g^{\varrho\sigma}\, a_{\sigma\beta\delta;\gamma}.$$

Dies sind die notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen, denen wir jedoch im Hinblick auf geometrische Anwendungen noch eine etwas andere Gestalt geben wollen.

Zunächst bestätigt man sofort durch direkte Rechnung, daß die kovariante Ableitung von $a_{\alpha\beta\gamma}$ symmetrisch in allen Indizes ist:

$$a_{\alpha\beta\gamma;\delta} = a_{\alpha\beta\delta;\gamma}. \tag{4.2}$$

(Die Rechnung ist im wesentlichen dieselbe wie bei O. VARGA, l. c.[7]), p. 46 — dort wird der $a_{\alpha\beta\gamma}$ entsprechende Tensor mit $\sum_{\alpha\beta\gamma}$ bezeichnet — und darf daher hier übergangen werden.)

Setzt man dies in die Integrabilitätsbedingungen (4.1) ein, so ergibt sich (wenn man $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ für den Krümmungstensor der Fläche schreibt):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = (g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) + a^{\varrho}_{\beta\gamma}a_{\varrho\alpha\delta} - a^{\varrho}_{\beta\delta}a_{\varrho\alpha\gamma}. \tag{4.3}$$

Zusammen mit der Symmetrie der beiden Fundamentalformen $g_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta\gamma}$ sind (4.2) und (4.3) die notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen der radialaffinen Flächentheorie. Es gilt dann der

Hauptsatz der radialaffinen Flächentheorie. *Zu vorgegebenen Funktionen $\tilde{g}_{\alpha\beta}(u^\delta)$, $\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma}(u^\delta)$, $\tilde{g}$ nicht ausgeartet, $\tilde{g}$ und $\tilde{a}$ symmetrisch, welche den Bedingungen* (4.2) *und* (4.3) [*oder der etwas schwächeren Bedingung* (4.1)] *genügen, gibt es eine und bis auf homogene Affinitäten genau eine Fläche, deren Fundamentalformen $g_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta\gamma}$ mit $\tilde{g}$ und $\tilde{a}$ übereinstimmen.*

Wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, gibt es zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $x^i(\overset{0}{u}{}^\delta) = \overset{0}{x}{}^i$, $x^i_\alpha(\overset{0}{u}{}^\delta) = \overset{0}{x}{}^i_\alpha$ jedenfalls genau eine Lösung von

$$x^i_{\alpha\beta} = \left(\left\{\begin{matrix}\varrho\\ \alpha\,\beta\end{matrix}\right\} - \tilde{a}^{\varrho}_{\alpha\beta}\right)x^i_\varrho - \tilde{g}_{\alpha\beta}x^i.$$

Sind $\overset{0}{x}{}^i, \overset{0}{x}{}^i_\alpha$ linear unabhängig, so gilt das gleiche für die Lösung in einer Umgebung von $\overset{0}{u}{}^\delta$. Für die zu der dann durch $x^i(u^\delta)$ definierten Fläche gehörigen Fundamentalformen g, a gelten die Ableitungsgleichungen

$$x^i_{\alpha\beta} = \left(\left\{\begin{matrix}\varrho\\ \alpha\,\beta\end{matrix}\right\} - a^{\varrho}_{\alpha\beta}\right)x^i_\varrho - g_{\alpha\beta}x^i,$$

und Koeffizientenvergleich der beiden Systeme ergibt die Gleichheit von $\tilde{g}, \tilde{a}$ mit den Fundamentalformen der Fläche.

Sind durch $\overset{1}{x}{}^i, \overset{1}{x}{}^i_\alpha$ andere Anfangsbedingungen vorgeschrieben, so erhält man eine Lösung mit diesen Anfangswerten, wenn man auf die eben gefundene Lösung diejenige Affinität anwendet, die $\overset{0}{x}{}^i, \overset{0}{x}{}^i_\alpha$ in $\overset{1}{x}{}^i, \overset{1}{x}{}^i_\alpha$ überführt; aus der Eindeutigkeit folgt der Hauptsatz.

§ 5. Krümmungen von Raum und Fläche

Da die Fläche $\mathfrak{F}$ als Untermannigfaltigkeit des Raumes mit der Riemannschen Metrik g_{ik} betrachtet werden kann, besteht zwischen dem Krümmungstensor R_{ijkl} des Raumes und dem Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der Fläche be-

kanntlich (vgl. etwa SCHOUTEN, Ricci-Calculus, 2nd. ed., p. 242) der Zusammenhang

$$x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma x^l_\delta R_{ijkl} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}). \tag{5.1}$$

Aus der Integrabilitätsbedingung (4.3) ergibt sich

$$x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma x^l_\delta R_{ijkl} = a^\varrho_{\beta\gamma} a_{\varrho\alpha\delta} - a^\varrho_{\beta\delta} a_{\varrho\alpha\delta}. \tag{5.2}$$

An anderer Stelle[1]) ist der Krümmungstensor R_{ijkl} berechnet worden:

$$R_{ijkl} = -\tfrac{1}{4} g^{rs} (g_{irk} g_{jsl} - g_{irl} g_{jsk}). \tag{5.3}$$

Daraus folgt

$$R_{ijkl} x^i = R_{ijkl} x^k = 0 \tag{5.4}$$

nach der Eulerschen Homogenitätsrelation. Aus (5.2) und (5.4) zusammen ergibt sich:

Notwendig und hinreichend für $R_{ijkl} = 0$ *ist*

$$a^\varrho_{\beta\gamma} a_{\varrho\alpha\delta} - a^\varrho_{\beta\delta} a_{\varrho\alpha\gamma} = 0.$$

Aus (5.1) folgt außerdem — wie auch bereits VARGA bemerkt hat —:

Notwendig und hinreichend dafür, daß $R_{ijkl} \equiv 0$, ist, daß die Flächenkrümmung konstant gleich 1 ist:

Die Flächen konstanter Affinkrümmung 1 *sind dadurch gekennzeichnet, daß die Krümmung der zugehörigen Raummetrik identisch verschwindet.*

Schließlich ist noch zu bemerken, daß die Quadriken mit Mittelpunkt 0 konstante Krümmung 1 haben, da für sie die Raumkrümmung nach (5.3) wegen $g_{ijk} = 0$ verschwindet.

Da die zweite Fundamentalform gleich der ersten ist, ist die *Normalkrümmung einer Kurve auf der Fläche* $\mathfrak{F}$ *identisch gleich* 1.

Die bisherigen Betrachtungen dieses Abschnittes gelten naturgemäß nur für Räume unendlicher oder endlicher Dimension $\geqq 3$. Für Kurven in der radialaffinen Ebene hat sich bereits früher[1]) ergeben, daß *die Krümmung der zugehörigen Metrik in der Ebene identisch verschwindet.* Man rechnet leicht nach, daß für die Krümmung K der definierenden Kurve $\mathfrak{F}$ gilt: $K \equiv 1$.

§ 6. Spezielle Probleme

In diesem Abschnitt sollen einige speziellere Fragen untersucht werden, wobei wir uns — wie in der vorliegenden Arbeit überhaupt — auf die Betrachtung solcher geometrischer Größen beschränken wollen, die für die geometrische Interpretation von E. CARTANs Theorie der Finsler-Räume (§ 7) von Interesse sind.

Wir haben bereits gesehen, daß der zur Hyperfläche $\mathfrak{F}$ in der von ihr erzeugten Riemannschen Raummetrik senkrechte Vektor im wesentlichen

gleich dem Ortsvektor x^i ist, so daß auf diesem Weg keine neue geometrische Größe erhalten wird. Man kann aber (im Falle endlicher Raumdimension) durch

$$N^i = \frac{1}{n-1} g^{\alpha\beta} x^i_{\alpha;\beta} \tag{6.1}$$

einen „Affinnormalvektor" erklären, der bekanntlich interessante geometrische Eigenschaften hat (Tangente der Schwerlinie). Dieser Vektor soll durch die Raummetrik ausgedrückt werden. Nach den Ableitungsgleichungen ist

$$\begin{aligned} N^i &= \frac{1}{n-1} g^{\alpha\beta} a^\varrho_{\alpha\beta} x^i_\varrho - x^i = -x^i + \frac{1}{2(n-1)} g^{\alpha\beta} g^{\varrho\sigma} g_{jkl} x^j_\alpha x^k_\beta x^l_\varrho x^i_\sigma \\ &= \frac{1}{2(n-1)} (g^{lj} - x^l x^j)(g^{ik} - x^i x^k) g_{jkl} - x^i \end{aligned}$$

$$N^i = \frac{1}{2(n-1)} g^{lj} g^{ik} g_{jkl} - x^i. \tag{6.2}$$

Die *Affinsphären* sind diejenigen Flächen, deren sämtliche Affinnormalen durch 0 gehen; sie *sind also gekennzeichnet durch jede der beiden folgenden Relationen:*

$$g^{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma\beta} = 0, \tag{6.3}$$

$$g^{ik} g_{ikl} = \frac{\partial g}{\partial x^l} = 0 \qquad (g = \det g_{ik}). \tag{6.4}$$

Eine andere interessante Beziehung ergibt sich durch die Betrachtung der zu $\mathfrak{F}$ dualen Hyperfläche $\mathfrak{F}^*$ im Dualraum. (Diese Überlegungen gelten auch wieder im unendlichdimensionalen Fall.) Ordnet man vermöge

$$x_i = g_{ik}(x)\, x^k \tag{6.5}$$

jedem Punkte des Raumes einen Punkt des Dualraumes zu, so wird dabei gerade $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}^*$ übergeführt. Da $\mathfrak{F}^*$ gegeben ist durch

$$g^{ij}(x)\, x_i x_j = 1$$

und die g^{ij} bekanntlich die zweiten Ableitungen von $\frac{1}{2} H^2$ sind (H Minkowskische Stützfunktion von $\mathfrak{F}$), ist g^{ij} die zu $\mathfrak{F}^*$ gehörige Riemannsche Metrik des Dualraumes. Die Abbildung (6.5) ist wegen

$$d(x_i) = g_{ikl}(x)\, x^k\, dx^l + g_{ik}(x)\, x^k = g_{ik}(x^i)\, x^k$$

eine Isometrie dieser Riemannschen Metriken:

$$g^{ik}\, d(x_i)\, d(x_k) = g_{ik}\, dx^i\, dx^k;$$

speziell ergibt sich eine isometrische Abbildung zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$, *deren radialaffine metrische Fundamentalformen also in entsprechenden Punkten übereinstimmen.*

Man kann den Dualraum vermöge einer nicht-ausgearteten homogenlinearen Abbildung A (a^{ij} symmetrisch) in den Ausgangsraum abbilden.

Dann sind $\mathfrak{F}$ und $A\,\mathfrak{F}^*$ in diesem Raum *isometrische Flächen*, welche übrigens polarreziprok bezüglich der Quadrik $a_{ik}y^i y^k = 1$ (a_{ik} Inverse zu a^{ij}) sind[9]). Man rechnet leicht nach, daß die kubischen Fundamentalformen von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ sich nur im Vorzeichen unterscheiden.

§ 7. Affingeometrische Interpretation von E. CARTANs Geometrie der Finsler-Räume

Ein Finslerscher Raum ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, in deren (radialaffinen) Tangentialräumen jeweils eine Hyperfläche $\mathfrak{F}$ als Indikatrix ausgezeichnet ist, deren Vektoren die Länge 1 zugeschrieben wird. Es ist daher von vornherein zu erwarten, daß die nur im Tangentialraum eines Punktes des Finslerschen Raumes definierten Größen eine affingeometrische Bedeutung besitzen[10]).

a) Die *Metrik* $g_{ik}(x)$ ist identisch mit der zur Indikatrix gehörigen *Riemannschen Metrik im Tangentialraum.*

b) Die Koeffizienten $C_j{}^i{}_k$ des *„euklidischen Zusammenhangs"* des Finslerschen Raumes sind die Koeffizienten des *Levi-Civitaschen Parallelismus der Riemannschen Metrik.*

c) Der Vektor $A^i(x) = \frac{1}{2} F(x)\, g^{ij} \frac{\partial g}{\partial x^j}$ hängt nach (6.2) in einfacher Weise mit dem *Affinnormalvektor* N^i zusammen:

$$A^i(x) = (n-1)\,F(x)\left(\frac{x^i}{F(x)} + N^i\left(\frac{x}{F(x)}\right)\right).$$

Insbesondere folgt daraus, daß $A^i = 0$ kennzeichnend ist für diejenigen Finsler-Räume, deren Indikatrizen Affinsphären sind, was bereits von A. DEICKE[11]) bemerkt und verwendet wurde. (Für die Definition von A^i: CARTAN, l. c. p. 13.)

d) Von den drei *Krümmungstensoren* des Finslerschen Raumes wird hier der erste, mit S_{ijkh} bezeichnete erfaßt (CARTAN p. 34, Formel XVI). Für ihn gilt:

$$S_{ijkh}(x) = \frac{1}{F^2(x)} R_{ijkh} \tag{7.1}$$

mit dem Krümmungstensor R_{ijkh} der Riemannschen Metrik[12]). Er verschwindet also für jeden zweidimensionalen Finsler-Raum identisch und ist

[9]) Daß bezüglich der „Einheitskugel" polarreziproke Flächen isometrisch sind, ist bereits in der Monographie von SALKOWSKI bemerkt (p. 128). Für konvexe Flächen $\mathfrak{F}$ hat E. R. LORCH die Isometrie der zu $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ gehörigen Raummetriken bewiesen: On the volume of smooth convex bodies in Hilbert space, Math. Z. **61**, 391—407 (1955).

[10]) Da wir nur einen einzigen festen Punkt des Finslerschen Raumes und dessen Tangentialraum betrachten, dürfen wir — um mit den bisherigen Bezeichnungen arbeiten zu können — von CARTANS Bezeichnung insofern abweichen, als wir für Tangentialvektoren x statt x' schreiben.

[11]) Die Finsler-Räume mit $A_i = 0$. Arch. d. Math. **4**, 45—51 (1953).

[12]) l. c. [1]) und Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 62—3—357.

für höherdimensionale Räume dann und nur dann gleich Null, wenn die Indikatrizen konstante Affinkrümmung 1 haben.

Den aus (7.1) und (5.1) folgenden Zusammenhang mit der Riemannschen Krümmung der Indikatrix hat auch VARGA bemerkt (l. c. [7]).

e) Der Landsbergsche *Winkel* (*métrique angulaire* bei CARTAN, p. 13—14) $d\varphi$ zwischen zwei Richtungen, repräsentiert durch die Einheitsvektoren x^i und $x^i + dx^i$) ist *identisch mit der affinen Flächenmetrik* der Indikatrix:

$$d\varphi^2 = g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k.$$

Aus den Ergebnissen von § 5 und (7.1) folgt der bei CARTAN (p. 35) ausgesprochene und auch von VARGA bewiesene Satz, daß die Winkelmetrik dann und nur dann von konstanter Krümmung 1 ist, wenn $S_{ijkh} = 0$.

Die in § 6 gezeigte Isometrie zwischen $\mathfrak{F}$ und der Fläche $\mathfrak{F}^*$ im Dualraum (der „Figuratrix") läßt sich hier so interpretieren: Der Winkel zwischen zwei Hyperebenen, gemessen durch die Metrik des Dualraumes, ist gleich dem Winkel zwischen ihren Normalvektoren.

f) Die Finsler-Räume mit

$$A_{ijk|0} = \frac{\partial A_{ijk}}{\partial x^h}\, x^h = 0$$

haben nach CARTAN p. 37 die Eigenschaft, daß die Winkelmetrik bei Parallelverschiebung unverändert bleibt. Das heißt, daß die *Indikatrizen durch Affinverbiegung auseinander hervorgehen.*

Technische Hochschule München, Institut für Geometrie

(Eingegangen am 12. Oktober 1956)

Naumann, H.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 75—82 (1957)

Über Vektorsterne und Parallelprojektionen regulärer Polytope

Von
Herbert Naumann

Das Ziel dieser Abhandlung ist im wesentlichen eine n-dimensionale Verallgemeinerung des Satzes von K. Pohlke (1853), der besagt, daß jedes konvexe Sechseck mit Mittelpunkt im gewöhnlichen Raum als Parallelprojektion eines Würfels erhalten werden kann. Es wird gezeigt, daß jedes „Hyper-Zonoeder" (d.i. ein konvexes Polytop, dessen 2-dimensionale Begrenzungselemente zentrale Symmetrie besitzen) des n-dimensionalen Raumes R_n, das p verschiedene Kantenrichtungen aufweist, im R_d, wo $d = \max(p, 2n-1)$ ist, als Parallelprojektion des p-dimensionalen Würfels γ_p darstellbar ist[1]). Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf Betrachtungen über Vektorsterne im Sinne von H. Hadwiger [2]. Weiter werden die Sätze über Vektorsterne auch auf Parallelprojektionen regulärer Simplizes α_n und regulärer 2^n-Zelle β_n angewandt.

§ 1. Gegeben seien in einem n-dimensionalen euklidischen Raum R_n p in einem festen Punkt — etwa dem Koordinatenursprung O — angreifende Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_p$, die den Raum R_n aufspannen mögen. Hierbei sei

$$\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad (i = 1, \ldots, p). \tag{1}$$

Das System dieser Vektoren, das wir mit $\mathfrak{S}_p$ bezeichnen, heiße ein *Vektorstern*[2]). Die Punkte mit den Koordinaten $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ $(i = 1, \ldots, p)$ mögen die *Endpunkte* von $\mathfrak{S}_p$ heißen. Wenn die Vektoren alle den gleichen Betrag $|\mathfrak{a}_1| = |\mathfrak{a}_2| = \cdots |\mathfrak{a}_p| = A$ haben und paarweise orthogonal sind, so nennen wir den Vektorstern im Falle $A = 1$ einen *Einheitsstern* $\mathfrak{E}_p$, bei beliebigem $A > 0$ einen um den Faktor A *dilatierten Einheitsstern* $\mathfrak{E}_p^{(A)}$.

Das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sei im folgenden mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bezeichnet. — Wir setzen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und führen den Richtungsvektor

$$\mathfrak{c} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n) = \frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|} = \frac{\mathfrak{x}}{R} \tag{2}$$

[1]) Wir verwenden hier für das reguläre Simplex des R_n, das reguläre 2^n-Zell und den n-dimensionalen Würfel die eingebürgerten Bezeichnungen α_n bzw. β_n bzw. γ_n (vgl. z. B. H. S. M. Coxeter [1]). In der Abhandlung [3] haben wir leider für β_n die Bezeichnung „Maßpolytop" benutzt, die von P. H. Schoute (Mehrdimensionale Geometrie, Bd. 2, Leipzig 1905) in einer anderen Bedeutung, nämlich für den n-dimensionalen Würfel γ_n gebraucht wurde.

[2]) Nach Hadwiger [2]. Bei Coxeter ([1], S. 27 ff.) ist ein etwas anderer Sternbegriff eingeführt.

ein. Nun definieren wir das „*Trägheitsmoment*“[3]) des Vektorsterns $\mathfrak{S}_p$ bezüglich der zur Richtung $\mathfrak{c}$ orthogonalen Hyperebene $\mathfrak{c}\mathfrak{x}=0$ als den Ausdruck

$$J=\sum_{i=1}^{p}(\mathfrak{a}_i\mathfrak{c})^2. \tag{3}$$

Trägt man vom Koordinatenursprung aus in jeder Richtung $\mathfrak{c}$ den Vektor der Länge $R=\sqrt{J^{-1}}$ ab, wo J das zur Richtung $\mathfrak{c}$ gehörige Trägheitsmoment ist, so liegen die Endpunkte dieser Vektoren auf der Hyperfläche zweiter Ordnung

$$\sum_{k,l=1}^{n} J_{kl}\,x_k\,x_l=1 \qquad \text{mit} \qquad J_{kl}=\sum_{i=1}^{p} a_{ik}\,a_{il} \qquad (k,l=1,\ldots,n), \tag{4}$$

denn es ist

$$J=\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cos\alpha_k\Big)^2=\sum_{k,l=1}^{n} J_{kl}\cos\alpha_k\cos\alpha_l=\sum_{k,l=1}^{n} J_{kl}\,\frac{x_k\,x_l}{R^2}=\frac{1}{R^2}\,.$$

Da die Vektoren von $\mathfrak{S}_p$ nach Voraussetzung nicht in einer Hyperebene liegen, so ist J nach Gl. (3) für jede Richtung $\mathfrak{c}$ positiv. Also ist $R=\sqrt{J^{-1}}$ für jede Richtung eine endliche, reelle Größe, d.h. durch (4) wird ein „Hyperellipsoid“ dargestellt. Seiner Definition zufolge ist es dem gegebenen Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ räumlich fest zugeordnet; wir nennen es das „*Trägheits-Hyperellipsoid*“ von $\mathfrak{S}_p$. Wenn ein Vektorstern die besondere Eigenschaft besitzt, daß sein Trägheits-Hyperellipsoid eine Hyperkugel ist, d.h. wenn die n^2 Beziehungen

$$J_{kl}=\delta_{kl}J_{11} \qquad (k,l=1,\ldots,n) \tag{5}$$

erfüllt sind, so nennen wir den Vektorstern *halb-eutaktisch*; ist außerdem der Angriffspunkt des Vektorsterns gleich dem Schwerpunkt seiner Endpunkte, so nennen wir den Vektorstern *eutaktisch*[4]). Eine Menge von p Punkten nennen wir *halb-eutaktisch bezüglich* O, wenn das System der p Vektoren mit O als Angriffspunkt und den gegebenen Punkten als Endpunkten ein halb-eutaktischer Vektorstern ist; eine Menge von p Punkten nennen wir (schlechthin) *eutaktisch*, wenn sie halb-eutaktisch bezüglich des Schwerpunkts ist, d.h. wenn die gegebenen Punkte die Endpunkte eines eutaktischen Vektorsterns sind.

Aus der Eigenschaft quadratischer Matrizen, daß ihre Zeilenvektoren genau dann paarweise orthogonal und vom Betrag A sind, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal und vom Betrag A sind, folgt unmittelbar:

[3]) Vgl. [3], § 6.

[4]) Zu dem von SCHLÄFLI eingeführten Begriff „eutaktisch“ siehe auch COXETER [1], S. 251ff., wo der Begriff auf eine etwas andere Weise eingeführt ist, aber — wie ein Vergleich mit Satz 3.2 zeigen wird — dasselbe besagt wie hier. — Im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum besitzt der Begriff des halb-eutaktischen Vektorsterns eine relativ einfache anschauliche Bedeutung. Man zeigt nämlich leicht, daß im R_3 ein Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ mit dem Angriffspunkt O genau dann halb-eutaktisch ist, wenn das auf O bezogene physikalische Trägheitsellipsoid seiner Endpunkte (bei Massenbelegung 1) eine Kugel ist.

Satz 1.1. *Ein Vektorstern $\mathfrak{S}_n$ im R_n ist genau dann ein dilatierter Einheitsstern $\mathfrak{E}_n^{(A)}$, wenn er halb-eutaktisch ist.*

Man zeigt leicht, daß durch senkrechte Parallelprojektion aus einem (halb-) eutaktischen Vektorstern stets wieder ein (halb-)eutaktischer Vektorstern entsteht. Da sich jede Matrix $((a_{ik}))$ vom Typ (p, n), deren Spaltenvektoren paarweise orthogonal und vom Betrag A sind, durch Hinzufügen von $p-n$ weiteren Spalten zum A-fachen einer orthogonalen Matrix erweitern läßt, so kann man jeden halb-eutaktischen Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ des R_n $(p \geqq n+1)$, dessen Vektoren durch Gl. (1) gegeben seien, als senkrechte Parallelprojektion des halb-eutaktischen Vektorsterns $\mathfrak{S}_p'$ des R_p mit den Vektoren

$$\mathfrak{a}_i' = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}) \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{6}$$

darstellen. Somit gilt unter Benutzung von Satz 1.1:

Satz 1.2. *Ein Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ des R_n $(p \geqq n+1)$ ist genau dann im R_p als senkrechte Parallelprojektion eines $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ darstellbar, wenn er halb-eutaktisch ist.*

Sei nun der allgemeine Fall betrachtet. Durch eine orthogonale Transformation läßt sich stets das Trägheits-Hyperellipsoid eines gegebenen Vektorsterns auf Hauptachsen transformieren. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit von jetzt an voraussetzen, daß der Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ bereits in einem Koordinatensystem gegeben ist, in dem sein Trägheits-Hyperellipsoid in Hauptachsenform

$$\sum_{k=1}^{n} J_{kk}\, x_k^2 = 1 \quad \text{mit} \quad J_{kk} = \sum_{i=1}^{p} a_{ik}^2 > 0 \tag{7}$$

dargestellt wird. Es gilt dann also

$$J_{kl} = \sum_{i=1}^{p} a_{ik}\, a_{il} = 0 \qquad \text{für } k \neq l. \tag{8}$$

Sei

$$d_{ik} = \frac{a_{ik}}{\sqrt{J_{kk}}} \qquad (i = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Dann bilden die n Spaltenvektoren der Matrix $((d_{ik}))$ ein normiertes Orthogonalsystem; durch Hinzufügung von geeignet gewählten $p-n$ Spalten läßt sich die Matrix also zu einer quadratischen p-reihigen orthogonalen Matrix $((d_{ik}))$ erweitern, deren Elemente d_{ik} für $k = 1, \ldots, n$ der Beziehung (9) genügen. Im R_p wird sodann durch das System der Vektoren

$$\mathfrak{b}_i = (A\, d_{i1}, A\, d_{i2}, \ldots, A\, d_{ip}) \qquad (A > 0,\ i = 1, \ldots, p) \tag{10}$$

ein um den Faktor A dilatierter Einheitsstern $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ gegeben. Falls $2n-1 > p$, so läßt sich zur weiteren Betrachtung $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ durch Anhängen von $2n-p-1$ weiteren Komponenten vom Wert Null an die Komponenten seiner Vektoren in einen R_{2n-1} einbetten; für $p \geqq 2n-1$ spielt sich die weitere Betrachtung

im R_p ab. — Durch Projektion von $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ in der Richtung[5])

$$x_1 = \text{const},\ x_2 = \text{const}, \ldots, x_n = \text{const}$$

auf den n-dimensionalen Raum

$$(11) \qquad x_{n+k} = \begin{cases} \alpha_k \cdot x_k & \text{für } k = 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{für } k = n, \ldots, p-n \end{cases} \quad (\textit{dies nur falls } p > 2n-1)$$

ergibt sich der Vektorstern der $(2n-1)$-dimensional dargestellten Vektoren[6])

$$(12) \quad \mathfrak{c}_i = (A\,d_{i1}, A\,d_{i2}, \ldots, A\,d_{in}, A\,\alpha_1 d_{i1}, A\,\alpha_2 d_{i2}, \ldots, A\,\alpha_{n-1} d_{i,n-1}) \quad (i = 1, \ldots, p),$$

der sich nach Ausführung der orthogonalen Transformation

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_k' = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha_k^2}}\, x_k + \dfrac{\alpha_k}{\sqrt{1+\alpha_k^2}}\, x_{n+k} \\ x_n' = x_n \\ x_{n+k}' = -\dfrac{\alpha_k}{\sqrt{1+\alpha_k^2}}\, x_k + \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha_k^2}}\, x_{n+k} \end{array} \right\} \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

durch die Vektoren

$$(14) \quad \mathfrak{c}_i' = \left(A\sqrt{1+\alpha_1^2}\,d_{i1}, A\sqrt{1+\alpha_2^2}\,d_{i2}, \ldots, A\sqrt{1+\alpha_{n-1}^2}\,d_{i,n-1}, A\,d_{in}, 0, \ldots, 0\right)$$

darstellen läßt. Für

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_{nn} = \min(J_{11}, J_{22}, \ldots, J_{nn})\ ^{7}), \quad A = \sqrt{J_{nn}}, \\ \alpha_k = \sqrt{\dfrac{J_{kk} - J_{nn}}{J_{nn}}} \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \end{array} \right.$$

ist dies im $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$-Raum wegen (9) der durch (1) gegebene Vektorstern $\mathfrak{S}_p$.

Damit ist gezeigt:

Satz 1.3. *Jeder Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ des R_n ist im R_d, wo $d = \max(p, 2n-1)$, als Parallelprojektion eines dilatierten Einheitssterns $\mathfrak{E}_p^{(1)}$ des R_p darstellbar.*

§ 2. Da die Endpunkte eines $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ des R_p die Ecken eines regulären Simplex α_{p-1} des R_{p-1} sind, so kann man mittels Satz 1.3 beweisen, daß sich jede Menge von p Punkten des R_n, die den R_n aufspannen, im R_d als Parallelprojektion der Ecken eines α_{p-1} darstellen läßt, wo $d = \max(p, 2n-1)$. Die folgende Betrachtung liefert ein Kriterium für die Möglichkeit einer Darstellung durch orthogonale Parallelprojektion eines α_{p-1} im R_{p-1} und führt sodann, im allgemeinen Fall, für die genannte Zahl d zu einem etwas günstigeren Wert.

[5]) Der im Uneigentlichen gelegene „projizierende Raum" ist also im Falle $2n-1 > p$ ein $(n-2)$-dimensionaler Raum, im Falle $p \leqq 2n-1$ ein $(p-n-1)$-dimensionaler Raum.

[6]) Die für $p > 2n-1$ im Anschluß an die $(2n-1)$-te Komponente folgenden Komponenten sind hier, da sie sämtlich gleich Null werden, einfach weggelassen.

[7]) Dies darf o.B.d.A. vorausgesetzt werden.

Zunächst führen wir weitere Begriffe ein. Ein Vektorstern, dessen Angriffspunkt O mit dem Schwerpunkt seiner Endpunkte zusammenfällt, heiße ein *zentrierter Vektorstern*. Ein Vektorstern $\mathfrak{S}_{n+1}$ des R_n, dessen Endpunkte den R_n aufspannen (d.h. dessen Endpunkte die Ecken eines Simplex sind), heiße ein *Simplexstern*. Ein zentrierter Vektorstern $\mathfrak{S}_{n+1}$ des R_n ist immer ein Simplexstern. Ein zentrierter Vektorstern, dessen Endpunkte die Ecken eines regulären Simplex α_n bilden, heiße ein *regulärer Simplexstern*.

Satz 2.1. *Ein Simplexstern ist genau dann regulär, wenn er eutaktisch ist.*

Sei ein Simplexstern $\mathfrak{S}_p$ des R_{p-1}, der von den Vektoren

$$\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,p-1}) \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{1}$$

gebildet werde, eutaktisch. Dann gilt also

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} a_{ik} &= 0 \qquad (2) \\ \sum_{i=1}^{p} a_{ik} a_{il} &= \delta_{kl} \sum_{i=1}^{p} a_{i1}^2 = \delta_{kl} J_{11} \qquad (3) \end{aligned}\right\} \quad (k, l = 1, \ldots, p-1).$$

Setzt man

$$a_{ip} = \sqrt{\frac{J_{11}}{p}} \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{4}$$

so erweist sich [unter wesentlicher Benutzung der Schwerpunktsbedingung (2)] die erhaltene p-reihige quadratische Matrix $((a_{ik}))$ als das $\sqrt{J_{11}}$-fache einer orthogonalen Matrix. Also bilden im R_p die Vektoren

$$\left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,p-1}, \sqrt{\frac{J_{11}}{p}}\right) \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{5}$$

einen $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ mit $A = \sqrt{J_{11}}$. Damit ist aber klar, daß die Endpunkte von $\mathfrak{S}_p$ die Ecken eines regulären Simplex α_{p-1} der Kantenlänge $\sqrt{2 J_{11}}$ repräsentieren.

Sei nun umgekehrt durch Gl. (1) ein regulärer und folglich zentrierter Simplexstern $\mathfrak{S}_p$ gegeben, dessen Endpunkte die Ecken eines α_{p-1} der Kantenlänge $\sqrt{2} \cdot A$ sind. Dieses Simplex ist im R_p durch die Endpunkte eines $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ mit dem Angriffspunkt O darstellbar, wobei bekanntlich das α_{p-1} von O den senkrechten Abstand $A/\sqrt{p}$ besitzt und das Lot von O auf das α_{p-1} dieses im Schwerpunkt trifft. Damit läßt sich schließen, daß im R_p durch die Vektoren

$$\mathfrak{a}_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,p-1}, \frac{A}{\sqrt{p}}\right) \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{6}$$

ein $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ gegeben ist. Folglich ist, als Folge von Satz 1.1, der gegebene reguläre Simplexstern eutaktisch und ferner $A = \sqrt{J_{11}}$.

Folgerung aus Satz 2.1. *Ein Simplex ist genau dann regulär, wenn die Menge seiner Eckpunkte eutaktisch ist.*

Satz 2.2. *Ein Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ des R_n $(p \geqq n+2)$ ist genau dann im R_{p-} als senkrechte Parallelprojektion eines regulären Simplexsterns darstellbar, wenn er eutaktisch ist.*

Sei durch

$$\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{7}$$

ein eutaktischer Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ gegeben. Dann läßt sich die Matrix $((a_{ik}))$ durch Hinzufügen von $p-n$ Spalten zu dem $\sqrt{J_{11}}$-fachen einer orthogonalen Matrix erweitern. Da die Ausgangsmatrix nach Voraussetzung die Eigenschaft hat, daß jede ihrer Spalten die Komponentensumme Null ergibt, so können die Elemente der letzten (p-ten) Spalte der Erweiterungsmatrix untereinander gleich gewählt werden. Dann ergeben zwangsläufig alle übrigen Spalten die Komponentensumme Null. Betrachtet man nun im R_{p-1} den von den Vektoren $\mathfrak{a}_i' = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,p-1})$ gebildeten Vektorstern, so erkennt man, daß $\mathfrak{S}_p$ senkrechte Parallelprojektion eines eutaktischen Vektorsterns $\mathfrak{S}_p'$ im R_{p-1}, d.h. nach Satz 2.1 eines regulären Simplexsterns ist.

Der zweite Teil des Beweises folgt einfach aus der Bemerkung, daß jede senkrechte Parallelprojektion eines eutaktischen Vektorsterns wieder einen eutaktischen Vektorstern ergibt.

Folgerung aus Satz 2.2. *Eine Menge von p Punkten des R_n $(p \geqq n+2$ ist genau dann im R_{p-1} als senkrechte Parallelprojektion der Ecken eines α_{p-} darstellbar, wenn sie eutaktisch ist.*

Satz 2.3. *Jeder zentrierte Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ des R_n ist im R_d, wo $d =$ $\max(p-1, 2n-1)$, als Parallelprojektion eines regulären Simplexsterns darstellbar.*

Der Beweis verläuft im wesentlichen genau so wie in § 1 der Beweis zu Satz 1.3, nur braucht die mittels § 1, Gl. (9) eingeführte Matrix $((d_{ik}))$ vom Typ (p, n) nur um $p-n-1$ Spalten erweitert werden, so daß die $p-$ Spaltenvektoren der entstandenen Matrix paarweise orthogonale Einheitsvektoren mit der Eigenschaft sind, daß ihre Komponentensumme jeweils verschwindet. (Zur Realisierung der letzten Bedingung vgl. den Beweis zum vorhergehenden Satz 2.2.) Demgemäß tritt im weiteren Verlauf des Beweises die Formel $d = \max(p-1, 2n-1)$ an die Stelle der Formel $d = \max(p, 2n-1$ von § 1.

Beim Übergang zur konvexen Hülle der Endpunkte von $\mathfrak{S}_p$ ergibt sich, wenn man der Einfachheit halber annimmt, daß alle p Punkte Eckpunkte ihrer konvexen Hülle sind:

Satz 2.4. *Jedes konvexe Polytop des R_n mit p Ecken ist im R_d, wo $d =$ $\max(p-1, 2n-1)$, als Parallelprojektion eines α_{p-1} darstellbar.*

Für $n=2$, $p=4$ ergibt sich speziell, daß jedes konvexe Viereck im gewöhnlichen Raum als Parallelprojektion eines regulären Tetraeders darstellbar ist.

§ 3. Ein Vektorstern ist *zentralsymmetrisch*, wenn mit jedem Vektor $\mathfrak{a}_i$ seiner Vektoren auch sein entgegengesetzter Vektor $-\mathfrak{a}_i$ zu ihm gehört

Ist $\mathfrak{S}_p$ ein beliebiger Vektorstern, so bezeichnen wir denjenigen Vektorstern, dessen Vektoren zu den Vektoren von $\mathfrak{S}_p$ entgegengesetzt sind, mit $\mathfrak{S}_p^*$. Der Vektorstern, der aus den Vektoren von $\mathfrak{S}_p$ und $\mathfrak{S}_p^*$ (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten) besteht, sei mit $\{\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_p^*\}$ bezeichnet. Mit dieser Schreibweise ist also jeder zentralsymmetrische Vektorstern, der von $2p$ Vektoren gebildet wird, in der Form $\{\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_p^*\}$ darstellbar. Aus der Definition eines eutaktischen Vektorsterns folgt, daß $\{\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_p^*\}$ genau dann eutaktisch ist, wenn $\mathfrak{S}_p$ halb-eutaktisch ist. Es ist ferner leicht einzusehen, daß $\{\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_p^*\}$ genau dann als (senkrechte) Parallelprojektion eines $\{\mathfrak{E}_p^{(A)}, \mathfrak{E}_p^{(A)*}\}$ darstellbar ist, wenn $\mathfrak{S}_p$ als (senkrechte) Parallelprojektion eines $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ darstellbar ist. Da schließlich die Endpunkte eines $\{\mathfrak{E}_p^{(A)}, \mathfrak{E}_p^{(A)*}\}$ die Ecken eines β_p bilden, so gelten die Sätze:

Satz 3.1. *Ein zentralsymmetrischer Vektorstern $\mathfrak{S}_{2n}$ des R_n ist genau dann ein $\{\mathfrak{E}_p^{(A)}, \mathfrak{E}_p^{(A)*}\}$, wenn er eutaktisch ist.*

Satz 3.2. *Ein zentralsymmetrischer Vektorstern $\mathfrak{S}_{2p}$ des R_n $(p \geqq n+1)$ ist genau dann im R_p als senkrechte Parallelprojektion eines $\{\mathfrak{E}_p^{(A)}, \mathfrak{E}_p^{(A)*}\}$ darstellbar, wenn $\mathfrak{S}_{2p}$ eutaktisch ist.*

Folgerung aus Satz 3.2. *Ein konvexes Mittelpunktspolytop des R_n mit $2p$ Ecken $(p \geqq n+1)$ ist genau dann im R_p als senkrechte Parallelprojektion eines β_p darstellbar, wenn die Menge der $2p$ Ecken eutaktisch ist.*

Satz 3.3. *Jedes konvexe Mittelpunktspolytop des R_n mit $2p$ Ecken ist im R_d, wo $d = \max(p, 2n-1)$, als Parallelprojektion eines β_p darstellbar.*

Für $n=2$, $p=3$ bzw. $p=2$ besagt dieser letztere Satz speziell, daß jedes konvexe Sechseck mit Mittelpunkt, ebenso jedes Parallelogramm im gewöhnlichen Raum als Parallelprojektion eines regulären Oktaeders aufgefaßt werden kann.

Es sei noch bemerkt, daß jeder zentralsymmetrische Vektorstern $\mathfrak{S}_{2p}$ stets ein zentrierter Vektorstern ist. Dies erlaubt die Anwendung der Sätze von § 2 auf zentralsymmetrische Vektorsterne bzw. auf konvexe Polytope mit Mittelpunkt. Speziell liegt hierin die bekannte Tatsache eingeschlossen, daß jedes β_p als senkrechte Parallelprojektion eines α_{2p-1} darstellbar ist.

§ 4. Ein konvexes Polytop des R_n, dessen 2-dimensionale Begrenzungselemente zentralsymmetrisch sind, heiße ein *Hyper-Zonoeder*[8]). Für $n=2$ ergeben sich trivialerweise die konvexen Mittelpunktspolygone, für $n=3$ sind es die Zonoeder. Wie in [1], S. 27 und 28 gezeigt wird, entsteht das allgemeine Zonoeder aus einem Vektorstern, der von den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_p$ gebildet sei, indem man die konvexe Hülle der Punkte

$$\mu_1 \mathfrak{a}_1 + \mu_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mu_p \mathfrak{a}_p \qquad (\mu_i = 0 \text{ oder } 1) \tag{1}$$

bildet. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß die $\mathfrak{a}_i$ lauter verschiedene Richtung haben, so entsprechen die $\mathfrak{a}_i$ genau den p verschiedenen Kantenrichtungen des abgeleiteten Zonoeders. Die Überlegungen lassen sich leicht

[8]) Vgl. Coxeter [1], S. 257. Für $n=3$ (Zonoeder) vgl. a. a. O. S. 28ff.

auf Hyper-Zonoeder beliebiger Dimension übertragen. Wenn der Vektorstern ein $\mathfrak{E}_n^{(A)}$ ist, so ist, wie man unmittelbar einsieht, das in der obigen Weise abgeleitete Hyper-Zonoeder ein n-dimensionaler Würfel γ_n der Kantenlänge A. Sodann gilt: Eine Parallelprojektion, die einen $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ auf den Vektorstern $\mathfrak{S}_p$ abbildet, bildet den aus dem $\mathfrak{E}_p^{(A)}$ abgeleiteten Würfel γ_n auf das aus dem $\mathfrak{S}_p$ abgeleitete Hyper-Zonoeder ab.

Damit lassen sich aus den Sätzen des § 1 die folgenden Sätze ableiten:

Satz 4.1[9]). *Ein Hyper-Zonoeder mit p verschiedenen Kantenrichtungen ist genau dann als senkrechte Parallelprojektion eines γ_p darstellbar, wenn es sich aus einem halb-eutaktischen Vektorstern ableiten läßt.*

Satz 4.2. *Jedes Hyper-Zonoeder des R_n, das p verschiedene Kantenrichtungen aufweist, ist im R_d, wo $d = \max(p, 2n-1)$, als Parallelprojektion eines γ_p darstellbar.*

Für $n=2$, $p=3$ ist das die klassische Aussage des Satzes von POHLKE.

Literatur

[1] COXETER, H. S. M.: Regular Polytopes. London 1948. — [2] HADWIGER, H.: Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope. Comm. Math. Helv. **13**, 90—107 (1940). — [3] NAUMANN, H.: Beliebige konvexe Polytope als Schnitte und Projektionen höherdimensionaler Würfel, Simplizes und Maßpolytope. Math. Z. **65**, 91—103 (1956).

[9] Vgl. COXETER [1], S. 255.

Schwelm (Westf.), Tannenstr. 8

(Eingegangen am 16. Oktober 1956)

Jacobs, K.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 83—92 (1957)

Fastperiodizitätseigenschaften allgemeiner Halbgruppen in Banach-Räumen

Von
Konrad Jacobs

Einleitung

In einer bekannten Abhandlung haben L. Alaoglu und G. Birkhoff folgenden Satz bewiesen.

Allgemeiner Ergodensatz. *Es sei* $\mathfrak{H} - \{h, \ldots\}$ *ein Banach-Raum und* $\mathfrak{G} = \{x, \ldots\}$ *eine beliebige Halbgruppe nichtdehnender Transformationen in* $\mathfrak{H}$. *Sowohl der Raum* $\mathfrak{H}$ *als auch sein dualer Raum* $\mathfrak{H}'$ *seien gleichmäßig-konvex. Dann enthält für jedes* $h \in \mathfrak{H}$ *die konvexe abgeschlossene Hülle* $\mathfrak{K}(h)$ *der „Bahn"* $\mathfrak{G}h = \{xh | x \in \mathfrak{G}\}$ *genau einen* $\mathfrak{G}$*-Fixpunkt* h_0.

Es wurden noch einige Abschwächungen der Voraussetzung erreicht und — nach Formulierung eines geeigneten Konvergenzbegriffs — Aussagen über die Approximation des „Mittelwertes" h_0 durch „Näherungsmittelwerte" $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h$ gemacht (vgl. G. Birkhoff [2], Alaoglu-Birkhoff [1], Riesz-Nagy [22]).

Man kann die Aussage des Ergodensatzes auch unter anderen Voraussetzungen beweisen, nämlich, wenn $\mathfrak{H}$ ein beliebiger *reflexiver* Banach-Raum und $\mathfrak{G}$ eine *abelsche* Halbgruppe von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$, die eine gemeinsame Schranke besitzen, ist (Riesz [19], [20], [21], Lorch [14], Yosida-Kakutani [23], Eberlein [9], Bourbaki [3], Jacobs [12], Riesz-Nagy [22]). Bei Dunford-Miller [8], Day [5], [7] und Dixmier [24] finden sich weitergehende Verallgemeinerungen in dieser Richtung.

Unter den eben genannten Voraussetzungen läßt sich der *Mittelwertaussage* des Ergodensatzes folgende *Fastperiodizitätsaussage* zur Seite stellen: $\mathfrak{H}$ zerfällt direkt in zwei $\mathfrak{G}$-invariante abgeschlossene lineare Teilräume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{P}$ ist der Raum der unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren, $\mathfrak{F}$ ist der Raum der Fluchtvektoren bezüglich $\mathfrak{G}$ (Jacobs [12]). Aus dieser Aussage kann die Ergodenaussage gefolgert werden.

In der vorliegenden Abhandlung soll diese Aussage unter den (noch etwas abgeschwächten) Voraussetzungen des Allgemeinen Ergodensatzes von Alaoglu-Birkhoff bewiesen werden. Neben den Ergodensatz tritt damit der

Aufspaltungssatz. *Es sei* $\mathfrak{H}$ *ein Banachraum und* $\mathfrak{G}$ *eine beliebige Halbgruppe von linearen Transformationen in* $\mathfrak{H}$. *Sowohl* $\mathfrak{H}$ *als auch der duale Raum* $\mathfrak{H}'$ *seien (je für sich) in solcher Weise stark-konvex normierbar, daß* $\mathfrak{G}$

bzw. die duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ nicht-dehnend ist; mindestens einer der beiden Räume sei unter derselben Nebenbedingung gleichmäßig-konvex normierbar. Dann zerfällt $\mathfrak{H}$ direkt in den Raum $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{G}$-fastperiodischen Vektoren ([12], Definition II.1) und den Raum $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{G}$-Fluchtvektoren ([12], Definition II.2), genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F},$$

deren Komponenten p, f linear, stetig und $\mathfrak{G}$-invariant von h abhängen (Satz 3.1 [Aufspaltungssatz II]).

Der Beweisgang hat viele Einzelheiten mit dem in [*12*] angegebenen Beweisgang gemeinsam; wo irgend möglich, soll daher auf [*12*] verwiesen werden. Die wesentlichsten Abweichungen treten im Beweise des Satzes 1.1 und im Satz 2.1 auf.

Genau wie in [*12*] ergibt sich ein neuer Beweis des Allgemeinen Ergodensatzes (Satz 2.3) unter etwas abgeschwächten Voraussetzungen. Man kann den Allgemeinen Ergodensatz leicht aus dem Aufspaltungssatz folgern, indem man den Mittelwertsatz für fastperiodische Funktionen (MAAK [*16*], KEINER [*13*]) auf unsere fastperiodischen Vektoren überträgt und zugleich berücksichtigt, daß alle Fluchtvektoren nach dem Satz von MAZUR ([*12*], Satz I.1) nur den Fixpunkt $0 \in \mathfrak{H}$ liefern. Man kann den Aufspaltungssatz als eine Erläuterung zum Allgemeinen Ergodensatz benützen. In § 6 wird etwas näher untersucht, welche Grenzen dem Ergodizitätscharakter von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ durch die Nichtkommutativität von $\mathfrak{G}$ im allgemeinen gesetzt sind.

§ 1. Reversible Vektoren und Fluchtvektoren. Formulierung des Aufspaltungssatzes I

Wir betrachten eine *beliebige Halbgruppe* $\mathfrak{G}$ von stetigen linearen Transformationen $x, \ldots$ in einem *reflexiven* Banach-Raum ([*12*], Kap. I) $\mathfrak{H} = \{h, \ldots\}$ und nehmen an, daß eine Zahl $\Gamma \geq 1$ mit

$$\|xh\| \leq \Gamma \|h\| \qquad (x \in \mathfrak{G},\ h \in \mathfrak{H}),$$

d.h. eine gemeinsame Schranke der $x \in \mathfrak{G}$ existiert ($\|h\|$ bezeichne die in $\mathfrak{H}$ erklärte Norm). $\mathfrak{G}$ enthalte die identische Transformation e.

Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ bezeichne $\mathfrak{G}(h)$ die *schwach-abgeschlossene Hülle* der Menge $\mathfrak{G}h = \{xh \mid x \in \mathfrak{G}\}$ (vgl. [*12*], Definition II.2).

Definition. *Ein Vektor $f \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor (unter $\mathfrak{G}$), wenn $O \in \mathfrak{G}(f)$ gilt; die Gesamtheit aller $\mathfrak{G}$-Fluchtvektoren bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$. Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ heißt ein $\mathfrak{G}$-reversibler Vektor, wenn $\mathfrak{G}(h) = \mathfrak{G}(r)$ für jedes $h \in \mathfrak{G}(r)$ gilt; die Gesamtheit aller $\mathfrak{G}$-reversiblen Vektoren bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$ (vgl. [12], Definitionen II.2 und III.2).*

Wir definieren die *schwache Hülle* $\bar{\mathfrak{T}}$ einer Menge $\mathfrak{T}$ von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$ wie in [*12*]. Es gilt:

1. Ist $\mathfrak{T}$ eine Halbgruppe, so ist auch $\overline{\mathfrak{T}}$ eine Halbgruppe. Ist dabei $\mathfrak{T}$ abelsch, so ist auch $\overline{\mathfrak{T}}$ abelsch.

2. Ist Γ eine gemeinsame Schranke der $x \in \mathfrak{T}$, so ist Γ auch eine gemeinsame Schranke der $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{T}}$.

3. $\mathfrak{G}(h) = \overline{\mathfrak{G}}h = \{\bar{x}h \mid \bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}\} \quad (h \in \mathfrak{H})$.

4. Jeder unter $\mathfrak{T}$ invariante abgeschlossene lineare Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist auch unter $\overline{\mathfrak{T}}$ invariant.

5. Es gilt $f \in \mathfrak{F}$ dann und nur dann, wenn $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{x}f = 0 \in \mathfrak{H}$ existiert. Es gilt $r \in \mathfrak{R}$ dann und nur dann, wenn es zu jedem $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{y}\bar{x}r = r$ gibt (vgl. Jacobs [12]).

Man beweist unschwer den

Satz 1.1. *Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt mindestens eine Zerlegung*

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R},\ f \in \mathfrak{F}. \tag{1}$$

Beweis. Es sei $h \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt. Genau wie in [12] zeigt man mittels des *Zornschen Lemmas:* Es gibt ein $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{x}h \in \mathfrak{R}$. Es sei $\mathfrak{X} = \{\bar{x}^\nu \mid \nu = 0,1,\ldots\}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{X}}$ eine *abelsche* Unterhalbgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$. Wiederholt man die zuerst bezüglich $\mathfrak{G}$ angestellten Überlegungen, indem man $\mathfrak{X}$ an die Stelle von $\mathfrak{G}$ treten läßt, so gewinnt man ein $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{X}}$, derart, daß $\bar{a}\bar{x}h = g$ $\mathfrak{X}$-reversibel ist. Nach Nr. 5 gibt es ein $\bar{b} \in \overline{\mathfrak{X}}$ mit $\bar{b}(\bar{a}\bar{x})g = g$. Setzen wir $\bar{b}g = \bar{b}(\bar{a}\bar{x})h = r$, so folgt wegen der *Kommutativität* von $\overline{\mathfrak{X}}$

$$\bar{a}\bar{x}(h - r) = 0.$$

r und $f = h - r$ liefern eine Zerlegung der gewünschten Art.

Man kann im allgemeinen nicht damit rechnen, daß die Zerlegung (1) eindeutig bestimmt ist. Dies zeigt das

Beispiel 1. $\mathfrak{H} = \{[\xi, \eta]\}$ sei zweidimensional und $\mathfrak{G}$ bestehe aus den drei Transformationen e, x, y mit den Matrizendarstellungen

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathfrak{R} = \{[\xi, \eta] \mid \eta = 0\}$

$$\mathfrak{F} = \{[\xi, \eta] \mid \xi = 0\} \cup \{[\xi, \eta] \mid \xi + \eta = 0\}.$$

Man erkennt sofort die im allgemeinen verschiedenen Zerlegungen

$$\begin{aligned}[\xi, \eta] &= [\xi, 0] + [0, \eta] \\ &= [\xi + \eta, 0] + [-\eta, \eta]\end{aligned}$$

vom Typus (1). Zugleich sieht man, daß $\mathfrak{F}$ kein linearer Raum ist. Ersetzt man die obigen Matrizen durch ihre Transponierten, so wird $\mathfrak{F}$, aber nicht $\mathfrak{R}$ ein linearer Raum.

Allgemein gilt der

Satz 1.2. *Es gilt* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$.

Er ist unschwer zu beweisen. Unser nächstes Ziel ist der

Satz 1.3 (Aufspaltungssatz I). *Sind der reflexive Banach-Raum* $\mathfrak{H}$ *und sein dualer Raum* $\mathfrak{H}'$ *(je für sich) stark-konvex normierbar, derart, daß dann jeweils* $\Gamma = 1$ *gesetzt werden kann, so sind* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{G}$*-invariante lineare abgeschlossene Teilräume von* $\mathfrak{H}$. *Jeder Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *besitzt genau eine Zerlegung*

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R},\ f \in \mathfrak{F},$$

wobei r *und* f *linear,* $\mathfrak{G}$*-invariant und norm-stetig von* h *abhängen. M.a.W.* $\mathfrak{H}$ *zerfällt direkt in* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{F}$. — *Die von* $\overline{\mathfrak{G}}$ *in* $\mathfrak{R}$ *induzierte Halbgruppe von linearen Transformationen ist eine Gruppe.*

Hierbei heißt eine Norm $\|h\|$ in $\mathfrak{H}$ — wie üblich — *stark-konvex*, wenn aus

$$\|f\| \leq 1,\ \|g\| \leq 1,\ f \neq g$$

stets $\left\| \frac{f+g}{2} \right\| < 1$ folgt. Es gibt stark-konvex normierbare, nicht-reflexive Banach-Räume (DAY [4]).

§ 2. Beweis des Aufspaltungssatzes I

Wir legen die Voraussetzungen des Satzes 1.3 in diesem Paragraphen fest zugrunde. Es gilt dann der

Satz 2.1. *Ist* $\mathfrak{U}$ *eine Unterhalbgruppe von* $\mathfrak{G}$, *so ist jeder* $\mathfrak{G}$*-reversible Vektor auch* $\mathfrak{U}$*-reversibel.*

Beweis. Es sei $r \in \mathfrak{R}$. Jedenfalls gibt es eine Zerlegung

$$r = r_0 + f_0$$

von r in einen $\mathfrak{U}$-reversiblen Vektor r_0 und einen $\mathfrak{U}$-Fluchtvektor f_0 (Satz 1.1, auf $\mathfrak{U}$ angewendet). Es gibt also ein $\bar{u} \in \overline{\mathfrak{U}}$ mit $\bar{u} f_0 = 0$, d. h. $\bar{u} r = \bar{u} r_0 = \bar{u}\left(\frac{r + r_0}{2}\right)$. Wir können $\|r\| = 1$ annehmen und haben wegen $\Gamma = 1$ $\|r_0\| \leq 1$. Aus der Reversibilität und aus $\Gamma = 1$ folgt sogleich $\|r_0\| = \|r\| = \|\bar{u} r\| = \|\bar{u} r_0\|$ (vgl. JACOBS [12]). Als kann wegen $\Gamma = 1$ nur $\left\| \frac{r_0 + r}{2} \right\| = 1$ gelten. Aus der starken Konvexität der Norm folgt nun $r = r_0$, q. e. d.

Nun kann man die ganzen in [12] angestellten *Dualitätsbetrachtungen* auf unseren Fall übertragen. Wir nehmen die in [12] eingeführten Bezeichnungen und wiederholen alle bisherigen Überlegungen bezüglich der dualen Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ im dualen Raum $\mathfrak{H}'$. Wir gewinnen eine Zerlegung

$$h' = r' + f', \quad r' \in \mathfrak{R}',\ f' \in \mathfrak{F}',$$

wobei $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{F}'$ analog wie $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ definiert sind. Mittels Satz 2.1 gelingt nun der Beweis für den

Satz 2.2. *Ist* $r \in \mathfrak{R}$, $f' \in \mathfrak{F}'$, *so gilt* $(r, f') = 0$; *ist* $f \in \mathfrak{F}$, $r' \in \mathfrak{R}'$, *so gilt* $f, r') = 0$.

Beweis. Sei $r \in \mathfrak{R}$, $f' \in \mathfrak{F}'$ und $\bar{x}' \in \overline{\mathfrak{G}}'$ so bestimmt, daß $\bar{x}' f' = O' \in \mathfrak{H}'$ gilt. $\bar{x}'$ ist die duale Transformation einer Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$. Es sei $\mathfrak{U} = \{\bar{x}^\nu | \nu = 0, 1, \ldots\}$. Dann ist r $\mathfrak{U}$-reversibel, es gibt also ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{U}}$ mit $\bar{y}\bar{x}r = r$. $\overline{\mathfrak{U}}$ ist aber *abelsch*. Somit ist auch $\bar{x}\bar{y}r = r$. Wir haben damit

$$(r, f') = (\bar{x}\bar{y}r, f') = (\bar{y}r, \bar{x}' f') = 0.$$

Genau so beweist man die zweite Hälfte des Satzes.

Nun kann man den Aufspaltungssatz I nach genau demselben Verfahren beweisen, wie dies — unter etwas anderen Voraussetzungen — in [*12*] durchgeführt wurde ([*12*], Kap. III, § 4).

Man gewinnt außerdem aufs neue den

Satz 2.3 (Allgemeiner Ergodensatz von ALAOGLU-BIRKHOFF). *Für jedes* $h \in \mathfrak{H}$ *enthält die stark-abgeschlossene konvexe Hülle* $\mathfrak{K}(h)$ *der Menge* $\mathfrak{G}h = \{xh | x \in \mathfrak{G}\}$ *genau einen* $\mathfrak{G}$*-Fixpunkt* h_0, *d.h. genau einen Punkt* h_0 *mit*

$$x h_0 = h_0 \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{G}$$

(vgl. BIRKHOFF [*2*], ALAOGLU-BIRKHOFF [*1*]).

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{K} = \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu \,|\, \alpha_\nu \geqq 0, \ \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = 1, \ x_\nu \in \mathfrak{G} \right\}$$

die *konvexe* Hülle der Halbgruppe $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{K}$ ist eine Halbgruppe, deren Elemente bei einer geeigneten starkkonvexen Norm die gemeinsame Schranke 1 besitzen. Es gilt: Jeder $\mathfrak{K}$-reversible Vektor ist ein $\mathfrak{G}$-Fixpunkt (die Umkehrung dieser Aussage ist trivialerweise richtig). Denn ist r $\mathfrak{K}$-reversibel und $a \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt, ist ferner $\mathfrak{U}$ die konvexe Hülle der Halbgruppe $\mathfrak{A} = \{a^\nu | \nu = 0, 1, \ldots\}$, so ist r auch $\mathfrak{U}$-reversibel, denn $\mathfrak{U}$ ist eine Unterhalbgruppe von $\overline{\mathfrak{K}}$. $\overline{\mathfrak{U}}$ ist abelsch. Hieraus folgert man: Ist $\bar{b} \in \overline{\mathfrak{U}}$, so ist

$$\|ar - r\| \leqq \|a\bar{b}r - \bar{b}r\|.$$

Denn $\|ar - r\| = \|a\bar{c}\bar{b}r - \bar{c}\bar{b}r\|$ für geeignetes $\bar{c} \in \overline{\mathfrak{U}}$. Es geht weiter

$$= \|\bar{c}(a\bar{b}r - \bar{b}r)\| \leqq \|a\bar{b}r - \bar{b}r\|.$$

Setzt man speziell $\bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a^\nu$, so folgt

$$\|ar - r\| \leqq \frac{2}{n} \|r\|.$$

Da n beliebig war, ist $\|ar - r\| = 0$, d.h. $ar = r$, was zu beweisen war.

§ 3. Formulierung des Aufspaltungssatzes II

Unsere eigentliche Absicht ist es, die Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ in eine *fastperiodische* und eine Fluchtkomponente aufzuspalten. Der Begriff „fastperiodischer Vektor unter $\mathfrak{G}$" ist in [*12*] erklärt worden. Bezeichnen wir die Gesamtheit aller unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren mit $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ ein $\mathfrak{G}$-invarianter abgeschlossener linearer Teilraum — nicht nur von $\mathfrak{H}$, sondern sogar von $\mathfrak{R}$ ([*12*], Satz II. 1.4). Wir formulieren den

Satz 3.1 (Aufspaltungssatz II). *Es sei $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banach-Raum; mindestens einer der beiden zueinander dualen Banach-Räume $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ sei gleichmäßig-konvex normierbar, derart, daß $\Gamma = 1$ gesetzt werden kann; der andere von den beiden Räumen soll unter der gleichen Nebenbedingung stark-konvex normierbar sein. Dann gilt $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$. Genauer: $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind $\mathfrak{G}$-invariante abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathfrak{H}$; jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Zerlegung*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten p, f hängen linear, $\mathfrak{G}$-invariant und normstetig von h ab. Die von der von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$ induzierten Halbgruppe gebildete starke Hülle (innerhalb von $\mathfrak{P}$) ist eine Gruppe.

Hierbei bezeichnen wir eine Norm $\|h\|$ in $\mathfrak{H}$ — wie üblich — als *gleichmäßig-konvex*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon) \quad \text{falls} \quad \|f\| \leq 1,\ \|g\| \leq 1,\ \|f-g\| \geq \varepsilon$$

gibt (vgl. DAY [*4*]); gleichmäßig-konvex normierbare Banach-Räume sind stets reflexiv (PETTIS [*18*]); jeder Hilbert-Raum ist gleichmäßig-konvex normiert (SZ.-NAGY [*17*]).

§ 4. Beweis des Aufspaltungssatzes II

Wir legen in diesem Paragraphen die Voraussetzungen des Satzes 3.1 (Aufspaltungssatz II) zugrunde. Unsere wesentlichen Beweismittel sind die folgenden beiden Sätze.

Satz 4.1. *Ist $\|h\|$ eine gleichmäßig-konvexe Norm in einem Banach-Raum $\mathfrak{B} = \{h, \ldots\}$, und ist $\mathfrak{M}$ eine schwach-abgeschlossene Menge konstanter Norm (d.h. gilt $\|g\| = \|h\|$ für $g, h \in \mathfrak{M}$), so ist $\mathfrak{M}$ totalbeschränkt (d.h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Punkte $h_1, \ldots, h_r \in \mathfrak{M}$ derart, daß zu jedem $h \in \mathfrak{M}$ ein ϱ mit $\|h - h_\varrho\| < \varepsilon$ existiert).*

Zum Beweis vgl. JACOBS [*11*], [*12*].

Satz 4.2. *Ist $\mathfrak{T}$ eine Gruppe von linearen Transformationen im Banach-Raum $\mathfrak{B} = \{h, \ldots\}$, welche eine gemeinsame Schranke besitzen, so ist ein Vektor $h \in \mathfrak{B}$ dann und nur dann fastperiodisch unter $\mathfrak{T}$, wenn die Menge $\mathfrak{T}h = \{th \mid t \in \mathfrak{T}\}$ totalbeschränkt (vgl. Satz 4.1) ist.*

Zum Beweis vgl. JACOBS [*12*].

Setzt man für $\mathfrak{B}$ den Raum der reversiblen Vektoren in demjenigen der beiden Banach-Räume $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, welcher gleichmäßig-konvex normierbar ist, so

induziert $\overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}'$ in $\mathfrak{B}$ eine *Gruppe* $\mathfrak{T}$ von linearen Transformationen, die bei passender Wahl der Norm alle die Schranke 1 besitzen. Man sieht, daß dann für jedes $h \in \mathfrak{B}$ die Menge $\mathfrak{T}h$ schwach-abgeschlossen und von konstanter Norm ist; sie ist also totalbeschränkt (Satz 4.1), die Vektoren $h \in \mathfrak{B}$ sind alle *fastperiodisch* unter $\mathfrak{T}$ (Satz 4.2). Nun kann man aus der Definition des Begriffs „fastperiodischer Vektor unter einer Halbgruppe" [*12*] leicht entnehmen, daß die Vektoren $h \in \mathfrak{B}$ auch unter jeder Unterhalbgruppe von $\mathfrak{B}$ fastperiodisch sind, insbesondere unter der von $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{G}'$) in $\mathfrak{B}$ induzierten Halbgruppe. Von hier aus schließt man leicht auf die Fastperiodizität des Vektoren $h \in \mathfrak{B}$ unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{G}'$).

Wir haben somit gefunden, daß in mindestens einem der beiden Räume $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ die Begriffe „reversibel" und „fastperiodisch" sich decken. Ist $\mathfrak{H}$ dieser Raum, so sind wir fertig. Ist $\mathfrak{H}'$ dieser Raum, so haben wir noch nachzuweisen, daß aus $\mathfrak{P}' - \mathfrak{N}'$ sogleich $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}$ folgt. Nach den voranstehenden Betrachtungen genügt es offenbar, anzunehmen, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Gruppe ist. Wir bemerken zunächst, daß für und beliebiges

$$h' = p' + f', \quad p' \in \mathfrak{P}', \; f' \in \mathfrak{F}', \; \bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$$
$$(\bar{x}\, r, h') = (\bar{x}\, r, p') = (r, \bar{x}'\, p')$$

gilt. Aus der $\overline{\mathfrak{G}}'$-Fastperiodizität von p' folgt nun leicht die Fastperiodizität der skalaren Funktion $\varphi(\bar{x}) = (\bar{x}\, r, h')$ auf der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. Dies gilt für beliebige $h' \in \mathfrak{H}'$. Wir sind somit fertig, sobald der folgende Satz bewiesen ist:

Satz 4.3. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, wenn für jedes $h' \in \mathfrak{H}'$ die (skalare) Funktion $\varphi(\bar{x}) = (\bar{x}\, h, h')$ fastperiodisch auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist.*

Ein Beweis dieses Satzes für *abelsche* Gruppen $\overline{\mathfrak{G}}$ findet sich in [*12*]; die Übertragung auf den allgemeinen Fall bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$ induzierte Halbgruppe eine *Gruppe* zur *starken* Hülle hat. Dies wurde in [*12*] bewiesen.

Damit ist der Aufspaltungssatz II vollständig bewiesen. Außer der Aufspaltung von $\mathfrak{H}$ erhält man eine analoge Aufspaltung von $\mathfrak{H}'$. Zwischen den beiden Aufspaltungen bestehen *Orthogonalitätsrelationen* (vgl. Satz 2.2; [*12*]).

§ 5. Kontraktionen im Hilbert-Raum

Die in [*12*], Anhang III durchgeführten Betrachtungen sind von irgendwelchen Kommutativitätseigenschaften von $\mathfrak{G}$ unabhängig und lassen sich somit auf unseren Fall übertragen. Wir gewinnen den

Satz 5.1. *Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{G}$ eine Halbgruppe von nichtdehnenden Transformationen in $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$, und $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind orthogonalkomplementär in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{G}$ induziert in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Halbgruppe $\mathfrak{G}_0$. Desgleichen induziert $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Halbgruppe $\mathfrak{G}_0'$. Die starken Hüllen von $\mathfrak{G}_0$ bzw. $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{P}$ stimmen überein; es handelt sich um eine unitäre Gruppe in $\mathfrak{P}$.*

§ 6. Der Ergodizitätscharakter nichtkommutativer Halbgruppen in Banach-Räumen

Sowohl aus den durch den Satz 3.1 (Aufspaltungssatz II) festgestellten Fastperiodizitätseigenschaften von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ als auch durch eine direkte Schlußweise (vgl. Satz 2.3) kann man den Ergodensatz gewinnen. Danach ist jedem $h \in \mathfrak{H}$ genau ein $\mathfrak{G}$-Fixpunkt h_0 als *Mittelwert* zugeordnet. Es erhebt sich die Frage, in welcher Weise h_0 durch *Näherungsmittel* $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h$ $(x_\nu \in \mathfrak{G})$ approximiert werden kann.

Ist $\mathfrak{G}$ *abelsch*, so ist die Antwort einfach: Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist die auf $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $h(x) = xh$ (mit Werten aus $\mathfrak{H}$) *ergodisch*, d.h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Elemente $x_1, \ldots, x_n$, derart, daß

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} h(x x_\nu) - h_0 \right\| < \varepsilon \qquad (x \in \mathfrak{G})$$

gilt. Hat $\mathfrak{G}$ z.B. die Gestalt $\mathfrak{G} = \{a^\nu \mid \nu = 0, 1, \ldots\}$, so kann man verschärfend schließen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x a^\nu h - h_0 \right\| = 0 \qquad \text{(gleichmäßig in } x \in \mathfrak{G})$$

gilt.

Ist $\mathfrak{G}$ *nicht-abelsch*, so ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, den oben formulierten Begriff „ergodisch" zu verallgemeinern. Die Funktion $h(x)$ heißt *linksergodisch* zum Mittelwert h_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{G}$ mit

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} h(x x_\nu) - h_0 \right\| < \varepsilon \qquad (x \in \mathfrak{G})$$

gibt. Kann man stets

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} h(x_\nu x) - h_0 \right\| < \varepsilon \qquad (x \in \mathfrak{G})$$

erreichen, so heißt die Funktion $h(x)$ *rechts-ergodisch*. Ist die Funktion $h(x)$ sowohl links- als auch rechts-ergodisch, so heißt sie schlechthin *ergodisch*. Kann man stets

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} h(x x_\nu y) - h_0 \right| < \varepsilon \qquad (x, y \in \mathfrak{G})$$

erreichen, so heißt $h(x)$ *voll-ergodisch* (oder auch stark-ergodisch, vgl. GODEMENT [10], MAAK [16], KEINER [13]).

Satz 2.3 besagt, daß unter den angegebenen Voraussetzungen $h(x)$ *stets links-ergodisch* ist. Ist h $\mathfrak{G}$-fastperiodisch, so ist $h(x)$ *voll-ergodisch*. Nach dem Aufspaltungssatz II könnte man somit hoffen, daß $h(x)$ stets voll-

ergodisch ist. Jedoch muß man im allgemeinen damit rechnen, daß die Fluchtkomponenten *nicht* einmal *rechts-ergodisch* sind. Dies zeigt das

Beispiel 2. $\mathfrak{H}$ sei ein Hilbert-Raum von abzählbarer Dimension, $e_1, e_2, \ldots$ eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}$. Ist τ eine Permutation der Menge aller natürlichen Zahlen $\nu = 1, 2, \ldots$, so gibt es genau eine unitäre Transformation t von $\mathfrak{H}$ mit

$$t e_\nu = e_{\tau(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

$\mathfrak{G}$ sei nun die Gruppe all derjenigen t, die zu Permutationen τ gehören, welche alle ν bis auf endlichviele festlassen. Dann sind alle Voraussetzungen des Aufspaltungssatzes II erfüllt. Man sieht sofort, daß $\mathfrak{P} = \{0\}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ gilt (vgl. JACOBS [12]). Man folgert sogleich, daß $h_0 = 0$ für alle $h \in \mathfrak{H}$ gilt. Wir zeigen, daß z.B. $e_1(x)$ nicht rechts-ergodisch ist. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt. Dann gibt es ein μ mit $x_\nu e_\mu = e_\mu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, sowie ein $x \in \mathfrak{G}$ mit $x e_1 = e_\mu$. Man sieht sogleich, daß

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu x e_1 = e_\mu$$

gilt, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Analog sieht man ein, daß $h(x)$ für $h \neq 0$ niemals rechts-ergodisch ist.

Man kann immerhin zeigen, daß die $h \in \mathfrak{H}$ mit voll-ergodischem $h(x)$ einen abgeschlossenen, $\mathfrak{G}$-invarianten linearen Teilraum von $\mathfrak{H}$ bilden; man könnte versuchen, einen komplementären Teilraum zu finden, und so in Form eines neuen Aufspaltungssatzes weitere Aufklärung über das Ergodozitätsverhalten der $h(x)$ im Fall nicht-kommutativer Halbgruppen $\mathfrak{G}$ zu gewinnen; hierüber ist mir nichts Näheres bekannt.

Verändert man die eben definierten Ergodizitätsbegriffe in der Weise, daß man nicht die *starke* (Norm-)Topologie, sondern die *schwache* Topologie zugrunde legt („schwache" Ergodizitätsbegriffe), so kann man leicht zeigen, daß $h(x)$ stets *schwach-ergodisch* ist. Aus Beispiel 2 ist jedoch leicht zu ersehen, daß $h(x)$ im allgemeinen *nicht schwach-vollergodisch* ist.

Literatur

[1] ALAOGLU, L., and G. BIRKHOFF: General ergodic theorems. Ann. of Math. **41**, 293—309 (1940). — [2] BIRKHOFF, G.: An ergodic theorem for general semigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **25**, 625—627 (1939). — [3] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [4] DAY, M. M.: Reflexive spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 313—317 (1941). — [5] DAY, M. M.: Ergodic theorems for abelian semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 399—412 (1942). — [6] DAY, M. M.: Uniform convexity in factor and conjugate spaces. Ann. of Math. **45**, 375—385 (1944). — [7] DAY, M. M.: Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 276—291 (1950). — [8] DUNFORD, N., and S. MILLER: On the ergodic theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, 538—549 (1946). — [9] EBERLEIN, W. F.: Abstract ergodic theorems and weakly almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 217—250 (1949). — [10] GODEMENT, R.: Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math.

Soc. **63**, 1—84 (1948). — [*11*] JACOBS, K.: Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im Hilbertschen Raum. Math. Z. **61**, 408—428 (1955). — [*12*] JACOBS, K.: Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Math. Z. **64**, 298—338 (1956). — [*13*] KEINER, H.: Verallgemeinerte fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Arch. Math. 1957. — [*14*] LORCH, E. R.: Means of iterated transformations in reflexive vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 945—947 (1939). — [*15*] MAAK, W.: Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Acta mathematica **87**, 33—57 (1952). — [*16*] MAAK, W.: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine u. angew. Math. **190**, 34—48 (1952). — [*17*] SZ.-NAGY, B.: Spektraldarstellungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Berlin 1942. — [*18*] PETTIS: A proof that every uniformly convex space is reflexive. Duke Math. J. **5**, 249—253 (1939). — [*19*] RIESZ, F.: Some mean ergodic theorems. J. London Math. Soc. **13**, 274—278 (1938). — [*20*] RIESZ, F.: Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 1—20 (1941). — [*21*] RIESZ, F.: Another proof of the mean ergodic theorem. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 75—76 (1941). — [*22*] RIESZ, F., u. B. SZ.-NAGY: Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest 1952. — [*23*] YOSIDA, K., and S. KAKUTANI: Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem. Ann. of Math. **42**, 188—228 (1941). — [*24*] DIXMIER, J.: Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications. Acta Sci. Math. Szeged **12**, 213—227 (1950).

Mathematisches Institut der Universität München

(Eingegangen am 9. September 1956)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXXVII. Band: Mathematische Statistik

Von Dr. **B. L. van der Waerden,** Professor der Mathematik an der Universität Zürich. Mit 39 Textfiguren und 13 Zahlentafeln. IX, 360 Seiten Gr.-8°. 1957.

DM 46.—; Ganzleinen DM 49.60

Inhaltsübersicht: Allgemeine Grundlagen. — Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten. — Mathematische Hilfsmittel. — Empirische Bestimmung von Verteilungsfunktionen, Mittelwerten und Streuungen. — Fourier-Integrale und Grenzwertsätze. — Gausssche Fehlertheorie und Students Test. — Die Methode der kleinsten Quadrate. — Schätzung unbekannter Konstanten. — Auswertung von beobachteten Häufigkeiten. — Bio-Auswertung. — Prüfung von Hypothesen durch Tests. — Anordnungstests. — Korrelation. — Tafeln. — Namen- und Sachverzeichnis.

XC. Band: Tabellen zur FOURIER Transformation

Von Dr. **F. Oberhettinger,** Professor der Mathematik, American University Washington, D. C., USA. X, 214 Seiten Gr.-8°. 1957.

DM 35.80; Ganzleinen DM 39.50

Inhaltsübersicht: Fourier-Kosinus-Transformationen. — Fourier-Sinus-Transformationen. — Exponentielle Fourier-Transformationen. — Anhang: Zusammenstellung von Abkürzungen und Definitionen der Funktionssymbole. — Literatur.

Die Tabellen stellen eine Sammlung von Integralen dar, die man als Fourier-Kosinus, Fourier-Sinus- und exponentielle Fouriertransformation einer gegebenen Funktion bezeichnet. Sie enthalten rund 1800 Formelpaare. Ein erheblicher Teil davon ist neu und ist unveröffentlichtem Material des Verfassers entnommen. Durch ein Literaturverzeichnis wird auf Werke über die Theorie der Fouriertransformation und ihre zahlreichen Anwendungen hingewiesen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** Neue Folge.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

7. Heft: **Additive Zahlentheorie**

Von Professor Dr. **H.-H. Ostmann,** Berlin. 1. Teil: Allgemeine Untersuchungen. VII, 233 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 29.80

8. Heft: **Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen**

Von Professor Dr. **Hans Wittich,** Karlsruhe. Mit 31 Abbildungen. IV, 163 Seiten Gr.-8°. 1955. Steif geheftet DM 25.60

9. Heft: **Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie**

Von Professor Dr. **F. Hirzebruch,** Princeton, N. J., USA. VIII, 165 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 30.80

10. Heft: **Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups**

By **Michio Suzuki,** Urbana/Illinois, USA. (Reihe: Gruppentheorie. Besorgt von R. Baer, Urbana.) VII, 96 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 16.50

11. Heft: **Additive Zahlentheorie**

Von Professor Dr. **H.-H. Ostmann,** Berlin. 2. Teil: Spezielle Zahlenmengen. VI, 136 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 22.—

12. Heft: **Algebraic Varieties**

By Professor **Mario Baldassarri,** Padova, Italien. (Reihe: Algebraische Geometrie. Besorgt von B. Segre, Rom.) Mit IX, 195 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 36.—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany